

T A M P E R E E N Y L I O P I S T O

Conditional Value at Risk -mittarin käyttö
portfolio-optimoinnissa

Empiirinen tarkastelu

Tampereen yliopisto

Johtamiskorkeakoulu

Taloustiede

Ohjaaja: Jukka Pirttilä

Tampereen yliopisto

Joonas Raitio

TIIVISTELMÄ

Tampereen yliopisto	Johtamiskorkeakoulu, taloustiede
Tekijä:	RAITIO, JOONAS SAMUEL
Tutkielman nimi:	Conditional Value at Risk -mittarin käyttö portfolio-optimoinnissa – empiirinen tarkastelu
Pro gradu -tutkielma:	57 sivua + liitteet 2 sivua
Aika:	Maaliskuu 2017
Avainsanat:	Conditional Value at Risk, Value at Risk, optimointi, sääntely, kes- kiarvo-varianssi

Riskin oikeanlainen mittaaminen on kiristyvän pankkisääntelyn myötä tullut entistä tärkeämmäksi osaksi jokapäiväistä pankkitoimintaa. Vuonna 2007 alkaneen finanssikriisin jälkeen on myös huomattu, ettei sääntelyä ole osattu kohdentaa oikein tai se ei ole ollut riittävää. Uusilla toimenpiteillä on usein vain paikattu aiempien säädösten jättämiä aukkoja, mutta toisaalta täydellistä tapaa toteuttaa sääntelyä ei todennäköisesti ole edes löydettävissä.

Tässä tutkielmassa keskitytään Basel-säädösten myötä laajalti käyttöön otettuun Conditional Value at Risk- (CVaR) tai toiselta nimeltään Expected Shortfall -mittariin (ES), joka korvasi aiemmin käytetyn Value at Risk -mittarin (VaR). Aiemmin nykyistä aktiivisemmin käytetyn VaR-mittarin käyttö riskienhallinnassa on nähty ongelmallisena, koska se ei ole vahvasti konvekksi päätösvektorin suhteen. Tämä on saattanut muodostaa tilanteita, joissa pienet muutokset portfolion allokatiossa saavat aikaan suuren muutoksen kokonaisriskissä. Vahvan konveksisuuden puuttuminen vaikeuttaa myös optimaalisen portfolioallokaation löydettävyyttä numeerisin menetelmin. Näiden syiden vuoksi on usein suosittu ES-mittarin käyttöä, joka täyttää konveksisuuden vaatimukset ja on koherentti riskimittari. Samoin sen muut matemaattiset ominaisuudet ovat houkuttelevammat verrattuna VaR-mittariin. Toisin kuin VaR, ES mittaa jakauman hännästä keskiarvon ja täten sisältää informaatiota myös jakauman hännän muodosta.

CVaR voidaan laskea karkeasti kolmella eri menetelmällä: suoraan empiirisen aineiston jakaumasta, varianssi–kovarianssimatriisi-menetelmällä tai Monte Carlo -simuloinnilla. Menetelmiä voi myös käyttää ristiin ja tuoda erilaisia ehdollisia riippuvuussuhteita laskentaan mukaan. Tässä tutkielmassa CVaR lasketaan eräänlaisella historiallisen menetelmän ja Monte Carlo -menetelmän risteytyksellä. Siinä empiirisestä jakaumasta simuloidaan J päivän mittaisia otantoja, joista CVaR lasketaan. Tällöin jakaumasta ei tarvitse tehdä oletuksia ja lopputulokseksi saadaan vahvasti konvekksi funktio, josta globaalin minimin löytäminen on suhteellisen yksinkertaista.

Tällaista minimi-CVaR-portfolion käyttäytymistä verrataan tavanomaisempiin minimivarianssi- ja maksimaalisen Sharpen luvun omaavien portfolioiden käyttäytymiseen todellisella osakeaikasarjalla. Aineistona käytetään Suomen OMXH25-osakeindeksin sisältämiä osakkeita pienin muutoksin. Tuloksissa havaitaan, että CVaR-minimoitu portfolio tuottaa verrattain hyvin verrattuna kahteen muilla tavoilla optimoituun portfolioon. Tämä selittyy sillä, että CVaR-rajoite ei rokota jakauman positiivisen puolen heilahteluista toisin kuin vertailtavat optimointimenetelmät. Se vain rajaa pisimmät negatiiviset hännät tuottojakaumissaan omaavat osakkeet pois portfolioista. Lisäksi vertailtaessa optimiportfolioiden stabiilisuutta havaitaan minimi-CVaR-portfolion olevan myös suhteellisen stabiili ajassa.

Sisällysluettelo

1. Johdanto	3
1.1 Tutkimuksen taustaa	3
1.2 Tutkimuksen tavoitteet ja rakenne	4
2 Pankkisääntelyn taustaa	5
2.1 Kansainvälinen järjestelypankki.....	6
2.2 Basel I.....	6
2.3 Basel II.....	7
2.4 Basel III.....	8
3 Riskin määritelmä ja mittaaminen	9
3.1 Riskimittareiden taustaa.....	10
3.2 Riskimittarin vaatimukset	13
3.3 Value at Risk.....	14
3.4 Conditional Value at Risk/Expected Shortfall	18
4 Metodit VaR- ja CVaR-mittareiden laskemiseksi.....	20
4.1 Historiallinen VaR/CVaR	21
4.2 Varianssi–kovarianssi-menetelmä	22
4.3 Monte Carlo -menetelmä	25
4.4 Bootstrapping-menetelmä	27
5 Portfolio-optimointi.....	28
5.1 Markowitzin portfolio-optimointi.....	30
5.2 CVaR-mittarin minimointi	35
6 Empiirinen osio.....	39
6.1 Käytetty aineisto	39
6.2 Käytettävistä menetelmistä.....	41
6.3 Optimointimenetelmä	42
6.4 Tulokset.....	43
7 Johtopäätökset.....	50
Lähteet	53
Liitteet	58

1. Johdanto

1.1 Tutkimuksen taustaa

Riskin mittaamisen merkitys on tullut tärkeämmäksi yhdentyvien rahoitusmarkkinoiden seurauksena. Tämä havaittiin muun muassa vuonna 2007 Yhdysvalloista alkaneesta finanssikriisistä, joka levisi nopeasti muihin myös maihin. Riskin oikeanlaisella mittaamisella voidaan tehostaa pankkisääntelyä ja sitä kautta ehkäistä kriisien leviämistä paremmin. Rahoituslaitokselle tämä tarkoittaa riskin ja tuoton välistä tasapainoa, eli pankin sijoitusportfolion oikeanlaista allokaatiota sääntelyrajoitteiden puitteissa.

Portfolion optimaalinen allokaatio on jo kauan perustunut Markowitzin portfolioteoriaan, jolla on vankka perusta kuluttajan preferensseissä ja odotetun hyödyn teoriassa. Kuluttajan ajatellaan toimivan rationaalisesti ja tavoittelevan maksimaalista tuottoa samalla minimoiden riski. Pankin näkökulmasta sen tehtävänä on maksimoida omistajiensa tuotto täyttäen samalla kaikki likviditeetti-, häntä-riski- ja pankin omat sisäiset rajoitteet.

Riskin määritelmä ei kuitenkaan ole triviaali ja sen suhteen joudutaankin tekemään aina yksinkertaisuuksia. Markowitz oletti riskin yksinkertaisesti varianssiksi, mutta jo kauan on tiedetty, että sijoittajilla on preferenssejä myös korkeammille momenteille. Lisäksi voidaan miettiä, riittääkö yhden momentin huomioiminen riittävän laajasti kattamaan riskin käsitteen, jotta sen pohjalta voidaan rakentaa oikeanlaista regulaatiota.

Samoin tulevien tuottojen ennustaminen kehittyneimmilläkään malleilla ei ole helppoa. Tämä syö pohjaa riski/tuotto-ajattelulta, minkä vuoksi akateemisessa tutkimuksessa on otettu muun muassa minimivarianssiportfoliot uudelleen tarkasteluun. Tällöin ei tarvitse ottaa kantaa tuotto-odotukseen ja portfolioallokaation optimointi voidaan tehdä pienemmällä virhemarginaalilla.

Kun nämä asiat yhdistetään pankkimaailmaan, havaitaan syntynyt ongelma liian yksinkertaisesta riskin määritelmästä. Jos pankkisääntelyä ei kyetä kohdentamaan oikein riskienhallinnan näkökulmasta, saattaa syntyä tilanteita, joissa paikalliset kriisit leviävät laajemmalle. Haasteita lisää myös alati lisääntyvä globalisaatio, jonka seurauksena maiden rajat menettävät merkitystään.

Kuinka riskiä tulisi sitten mitata? Päättelyssä joudutaan nopeasti tilanteeseen, jossa riskille on annettava jokin numeerinen arvo. Yksi tällaisista *riskimittareista* on Basel-säädöksissä esitetty Value at Risk. Sen tarkoituksena on mitata riskiä huomioimalla vain jakauman huonoimmat skenaariot pyrkien näin

tuomaan parannuksen varianssin käyttöön, joka koko jakauman huomioiden rankaisee myös positiivisesta riskistä. Value at Risk -mittarin puutteet riskin mittaamisessa huomattiin kuitenkin nopeasti, kun ymmärrettiin, että riski saattaa hajauttamisella lisääntyä. Mittari korvattiinkin myöhemmin *koherentilla* Conditional Value at Risk- tai toiselta nimeltään Expected Shortfall -mittarilla.

On tärkeä tiedostaa ongelma, että vääränlainen riskin määritelmä voi pahimmassa tapauksessa luoda otolliset puitteet massiivisille finanssikriiseille. Tämän vuoksi riskin oikeanlainen mittaaminen on tärkeää.

1.2 Tutkimuksen tavoitteet ja rakenne

Tutkimuksen tarkoituksena on esittää kuinka optimaalinen ES/CVaR-portfolio lasketaan numeerisin menetelmin ja verrata siitä saatavia tuloksia Markowitzin (1952) portfolioteoriasta juontaviin tavanomaisiin minimivarianssin ja maksimaalisen Sharpen luvun omaaviin portfolioihin. Tarkastelussa on, kuinka eri tavoin optimoidut portfoliot käyttäytyvät, kun vuonna 2007 alkanut finanssikriisi otetaan mukaan aikasarjaan ja jätetään pois. Samoin vertaillaan eri portfolioiden stabiilisuutta yli ajan.

Tutkielma rakentuu siten, että luvussa kaksi esitellään pankkisääntelyn pääteemat ensimmäisestä Basel-säädöksestä viimeisimpään Basel III -säädökseen. Samoin tarkasteluun on pyritty tuomaan mukaan säädösten vaikuttavuutta pankkeihin.

Luvussa kolme määritellään riski ja tutustutaan työssä käytettyihin riskimittareihin syvemmin. Tarkoituksena on tuoda ilmi riskin mittaamisen haasteita, samoin kuin eri mittareiden samankaltaisuutta. Lisäksi määritellään koherentti riskimittari.

Neljännessä luvussa tarkastellaan menetelmiä, joiden avulla Value at Risk - ja Conditional Value at Risk -mittareiden arvoja voidaan laskea. Samoin esitellään menetelmien hyvät ja huonot puolet. Viidennessä luvussa siirrytään tarkastelemaan portfolio-optimointia. Ongelmaa pyritään lähestymään pääasiassa allokoijan odotetun hyödyn maksimointiongelman kautta. Luvussa tutustutaan myös prospektiteoriaan pintapuolisesti, jonka jälkeen johdetaan Markowitzin portfolioteoria ja CVaR/ES-minimointi.

Luvussa kuusi on työn empiirinen osio, jossa tarkastellaan aiemmin esitettyjen mallien mukaisesti optimoitujen portfolioiden käyttäytymistä käytännössä. Samoin esitetään menetelmä, jolla optimiportfoliot on laskettu. Lopuksi seitsemännessä luvussa ovat tutkielman loppupäätelmät, ja siinä esitetään myös mahdollisen jatkotutkimuksen teemoja.

2 Pankkisääntelyn taustaa

Lähtökohtaisesti jokaisella markkinoilla toimijalla on valta valita, miten varallisuutensa allokoit, jolloin myös jokainen toimija on vastuussa omista tekemisistään. Siksi voidaan kysyä, onko pankkisääntely ylipäättään tarpeellista. Jos markkinoiden oletetaan toimivan täydellisen informaation periaatteiden mukaisesti, Modiglianin ja Millerin (1958) teoreema on voimassa. Heidän teoreettisessa maailmassaan ei ole tarvetta pankkisääntelylle, koska kaikki markkinaosapuolet tietävät täydellisesti toisia osapuolia koskevat riskit. Tällöin kunkin pankin tarjoama korko asettuisi optimaaliselle tasolle sen riskisyyden mukaan. (Stolz 2007, 7–8.)

Pankkisääntely on kuitenkin yleisesti nähty tarpeellisenä, jopa välttämättömänä asiana rahoitusmarkkinoiden vakauden kannalta. Sääntelyn tarkoituksena on taata pankkien riittävä vakavaraisuus kriisiaikoina, jotta laajamittaiselta finanssikriisiltä välttyttäisiin. Tavallisen liikepankin kannalta sääntelyn pääteemat koskevat pääasiassa ulkoisvaikutuksia ja talletusvakuutuksia.

Ulkoisvaikutuksilla tarkoitetaan esimerkiksi pankin vararikon leviämistä muihin yrityksiin ja toimijoihin. Tähän liittyy läheisesti myös niin kutsuttu *systeemiriski*, josta saatiin esimerkki Lehman Brothersin konkurssin yhteydessä vuoden 2008 lopulla, mistä seurasi kansainvälinen finanssikriisi. Systeemiriskillä tarkoitetaan riskiä siitä, että sillä hetkellä finanssisektoria koskeva kriisi laajenee talouden muille sektoreille ulkoisvaikutusten kautta (Acharya & Richardson 2009, 283).

Talletusvakuutuksilla pyritään varmistamaan, että pankki maksaa talletuksen nimellisen arvon takaisin tallettajalle hänen sitä pyytäessään. Pankki on kuitenkin usein sijoittanut talletetut varat epälikvideihin kohteisiin, esimerkiksi asuntolainoihin. Jos pankki ajautuu vaikeuksiin ja tallettajat vetävät yhtäaikaaisesti talletuksensa ulos pankista, voi syntyä tilanne, ettei se pysty maksamaan tallettajille heidän talletuksiaan takaisin täysimääräisenä. Talletuspaoksi kutsuttu tilanne tulee yhteiskunnalle kalliiksi ja siihen voi joutua myös pankki, joka on vakavarainen. (Jorion 2007, 51.)

Pankkisääntelyllä onkin tarkoitus minimoida ja ennaltaehkäistä ulkoisvaikutuksiin ja talletusvakuutuksiin liittyviä riskejä. Jälkimmäinen tilanne pyritään estämään muun muassa valtion talletustakauksilla, jolloin valtio takaa pankkiin talletetut varat tiettyyn rajaan asti. Sääntelyllä taas pyritään pankkien riittävään vakavaraisuuteen, jotta niiden varat riittävät kattamaan todennäköiset tappiot. Useiden tärkeiden pankkisäädösten taustalla on Kansainvälinen järjestelypankki.

2.1 Kansainvälinen järjestelypankki

Kansainvälinen järjestelypankki (Bank for International Settlements, BIS) on vuonna 1930 perustettu kansainvälinen pankkiorganisaatio, joka perustettiin alun perin ensimmäisen maailmansodan jälkeen Saksalle määrättävien sotakorvausten selvittämiseen. Siihen kuuluu 60 keskuspankkia eri jäsenmaista, ja niiden yhteenlaskettu bruttokansantuote kattaa noin 95 % koko maapallon BKT:stä.

Nykyään BIS:n tavoitteena on yhdenmukaistaa ja vakauttaa pankkitoimintaa globaalisti, jotta kilpailu olisi tasapuolisempaa ja tuottoa ei haettaisi kasvavien riskien kustannuksella. Se toimiikin enemmän jonkinlaisena keskuspankkien keskuspankkina ja rahataloudellisen yhteistyön foorumina, tutkimuslaitoksena ja tilastojen tuottajana.

BIS toimii komiteoidensa kautta, joista tärkein on Basel Committee On Banking Supervision (BCBS). Sen merkittävimpiä aikaansaannoksia ovat niin kutsutut Basel-vakavaraisuussäännöt, joista ensimmäinen tuli vuonna 1988 ja kaksi seuraava noin kymmenen vuoden välein (VM 2009, 77).

2.2 Basel I

Basel I -päätökset tehtiin vuonna 1988 G10-maiden kanssa ja ne tulivat voimaan asteittain vuoden 1992 joulukuuhun mennessä. Päätarkoitus säädöksillä oli vakavaraistaa pankkeja ja yhdenmukaistaa niiden sääntelyä. Siihen asti pankeilla oli kannustimia saada tuottoa toinen toistaan riskisemmillä keinoilla. Basel I:n tarkoitus oli vähentää ja lopettaa toiminta, jossa tuottoa haetaan aina vain alemmilla pääomavaatimuksilla. Säännöksissä edellytettiin pankit pitämään hallussaan 8 % pääomaa riskipainotetuista saamisistaan (risk-weighted assets, RWA)¹. RWA tarkoittaa, että jokainen pankin hallussa pitämä omaisuuserä painotetaan sen riskisyyden mukaan. Esimerkiksi käteisen riskipaino on 0 % ja kiinteistöjen 100 % tarkoittaen sitä, että käteistä vastaan pankin tarvitsee pitää omaa pääomaa 0 % ja kiinteistöjä vastaa 8 %. (Jokivuolle & Vauhkonen 2010; Jorion 2007, 54–55.)

Kaiken kaikkiaan Basel I onnistui tasapainottamaan pankkien riskihalukkuutta huomattavasti. Sen voidaankin nähdä olevan siihen asti tärkein pankkisopimus. Vuodesta 1990 vuoteen 2001 pankkien

¹ Pankkien pääoma lajitellaan Tier 1- ja Tier 2 -pääomiin. Tier 1 on ns. ydinpääomaa, joka sisältää karkeasti osakkeenomistajan oman pääoman ja kertyneet voittovarot. Tier 2 on yksinkertaisesti jäljelle jäävä pääoma. Basel I määritteli tarkasti ottaen, että vähintään 4 % piti olla Tier 1 -pääomaa. Myöhemmin Basel III -säädöksessä annettiin mahdollisuus myös Tier 3 -pääomalle, joka voi sisältää lyhytaikaisia velkoja. (Jorion 2007, 61.)

pääomasuhde kasvoi Basel I:n seurauksena 8,5 prosentista noin 12 prosenttiin. (Jablecki 2009, 19–20.)

Sopimuksen jälkeisinä vuosina huomattiin kuitenkin nopeasti, etteivät laveat säädökset ole riittäviä. Yhdeksi ongelmaksi muodostui muun muassa pankkien kannustin arvopaperistaa tiettyjä ongelmallisia omaisuuseriä, kuten lainoja, jotka voitiin sen jälkeen myydä eteenpäin ja kirjata kaupankäyntivaraan. Tämä alensi pääomavaatimuksia, mutta ei välttämättä alentanut systeimiriskiä. (Jorion 2007, 57.)

2.3 Basel II

Basel II -sopimus solmittiin vuonna 2004, mutta se tuli täysimääräisesti voimaan vasta vuoden 2006 lopulla. Se perustuu toisiaan tukeviin niin kutsuttuihin *kolmeen pilariin*.

Pilari I pitää sisällään vähimmäispääomavaatimukset luotto-, markkina- ja operatiiviselle riskille. 8 % RWA:n määrää ei muutettu. Jokaiselle riskien ryhmälle on käytettävissä useampia mahdollisia laskutapoja. Esimerkiksi luottoriskeihin voidaan käyttää sisäisten luokitusten menetelmää (internal-rating-based, IRB) tai vaihtoehtoisesti menetelmiä, jotka pohjautuvat ulkopuoliseen luottoluokitukseen. Lopputuloksena täytyy kuitenkin olla, että pankin oma pääoma on suurempi kuin *TRC*, eli

$$\text{oma pääoma} > TRC = CRC + MRC + ORC, \quad (1)$$

jossa

TRC = total-risk charge,

CRC = credit-risk charge,

MRC = market-risk charge,

ORC = operative-risk charge.²

Pilari II sisältää valvottavan sekä valvojan kokonaisarvion, minkä tarkoituksena on varmistua pääomien riittävydestä siirtäen vastuuta myös regulaattorille, jonka tehtävänä on seurata pankin toi-

² (Jorion 2007, 58)

mintaa ja huomauttaa mahdollisimman aikaisessa vaiheessa puutteista. Valvottavan omaa ennakkoivaa toimintaa kuitenkin korostetaan. Toiseen pilariin kuuluu myös riskejä, joita ei huomioida ensimmäisessä pilarissa, kuten korkotasoriski.

Pilari III korostaa pankkien omaa markkinakuria ja se pyrkii kannustamaan aiempaa avoimempaan tiedottamiseen. Se sisältää myös konkreettisia tiedonjulkaisuvaateita.

Basel II toi myös Value at Risk -mittarin pakolliseksi jokapäiväistä pankkitoimintaa. VaR on alun perin pankkiiriliike J.P. Morganin kehittämä riskimittari heidän omaan käyttöönsä. Sillä pyritään mittaamaan niin sanottua häntäriskiä jonkin riskifaktorin jakaumasta. Basel II toi VaR-mittarin pankkitoimintaan lisäämällä sen *MRC*:n laskukaavaan, joka on annettu

$$MRC_t = \max \left(k \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}, VaR_{t-1} \right) + SRC_t, \quad (2)$$

jossa k on kerroinfactori ja SRC_t on spesifinen riskikomponentti, jonka tarkoituksena on toimia puskurina erityistilanteita varten. *MRC* on siis 60 päivän VaR-keskiarvo tai edellisen päivän VaR, johon lisätään mahdollinen erityinen riskikomponentti³.

2.4 Basel III

Pankkisääntelyyn liittyy hyvin tunnettu ongelma sen luonnollisesta myötäsykkisyydestä (Brunnermeier et al. 2009; Repullo & Suarez 2009). Nousukausina pankkien tarvitsemien pääomien tarve laskee, kun niiden tulot nousevat ja luottotappiot vähenevät. Laskukautena taas pääomien tarve nousee, kun riskikorjatut pääomavaatimukset nousevat pankkien tappioiden pienentäessä omaa pääomaa. Jos pankit eivät nopeasti kykene lisäämään oman pääoman määrää, ne joutuvat vähentämään antolainauksia, mikä voi lopulta johtaa luottolamaan.

Vuonna 2007 alkaneesta finanssikriisistä huomattiinkin nopeasti, ettei sääntely ollut riittävää tai se oli vääränlaista. Pankit olivat myös usein vain näennäisesti vakavaraisia. Vauhkosen (2010) mukaan

³ Vuonna 2009 Basel II -säädökseen tehtiin muutoksia, joissa muun muassa lisättiin *MRC*-kaavaan stressattu Value at Risk, lisäriski (Incremental-risk charge, IRC), kokonaisvaltainen riski (Comprehensive-risk measure, CRC) ja arvopaperistamisriski (Securitization Risk). (Bharathulwar 2011.)

eräillä pankeilla saattoi olla vain 2 % laadukasta Tier 1 -pääomaa. Tämä voitiin saavuttaa muun muassa arpaperistamalla tiettyjä omaisuuseriä ja siirtämällä ne luottosalkusta (*banking book*) kaupan-
käyntisalkkuun (*trading book*), koska jälkimmäistä vastaan tarvittiin vähemmän omia varoja.

Näihin ongelmaan ratkaisuksi syntyi Basel III, jonka päätökset tehtiin pääosin vuonna 2009 G20-
maiden kesken, mutta ne julkistettiin vasta joulukuussa 2010 (EPNAs (EU) 575/2013, 1.). Sopimuk-
sen tarkoituksena on estää laajamittainen kriisin leviäminen, parantamalla pankkien shokkiabsor-
bointikykyä lisäämällä likviditeettiä ja nostamalla vakavaraisuusvaateita.

Mielenkiintoisimpana muutoksena uudessa säädöksessä on siirtymä Value at Risk -mittarista Expec-
ted Shortfall -mittariin. Syynä mittarin vaihtoon on VaR:n kyvyttömyys mitata häntäriskiä, johon ES
tuo parannuksen – kuten myöhemmin nähdään – mittaamalla hännästä keskiarvon.

3 Riskin määritelmä ja mittaaminen

Jotta riskimittareita voidaan tarkastella, joudutaan ensin määrittelemään mitä riski on ja mitä se ei
ole.

Riskin määritelmä ei ole aivan triviaali. Jos se määritellään mahdollisuudeksi jollekin odottamatto-
malle tai odotetulle tapahtumalle, niin mitä nämä tapahtumat olisivat? Vaikka ne voitaisiinkin iden-
tifioida, niin jotta niistä saatua tietoa voitaisiin hyödyntää, niiden todennäköisyys pitäisi kyetä kvan-
tifioidaan.

Arkikielessä ”riski” ja ”epävarmuus” ovat usein synonyymejä, mutta Knight (1921) eriytti nämä mää-
rittäen riskin matemaattisesti esitettävänä olevaksi todennäköisyydeksi ja epävarmuuden ei-mate-
maattisesti esitettäväksi⁴. Toisin sanoen riskin määritelmä on voimassa vain, kun sen todennäköisyys-
jakauma on määriteltävissä. Hänen mukaansa tästä seuraa, että knightilaiselle riskille – joka siis voi-
daan kvantifioida – ei voida saada preemiota, koska se on aina täydellisesti vakuutettavissa. Tästä
esimerkkinä voisivat olla Helsingissä sattuneet asuntopalot tai kolarit, jotka molemmat ovat täydel-
lisesti vakuutettavissa olevia.

⁴ Knight ajatteli riskin sisältävän tiedetyn määrän eri maailmantiloja, joiden todennäköisyys toteutua tiedettiin myös. Epävarmuus taas sisältää ei tiedetyn määrän maailmantiloja, josta seuraa, ettei niiden toteutumisen todennäköisyyttä
kään tiedetä.

Knightilainen epävarmuus voidaan kausaalinäkökulmasta jakaa vielä kahteen alaosaan: (1) täysin *sattumanvaraisiin* ja (2) *epistemologisiin* syihin. Sattumanvaraisilla syillä tarkoitetaan tapahtumia, jotka syntyvät täysin irrallaan muusta maailmasta ja ovat täydellisen ennustamattomissa. Epistemologisilla syillä tarkoitetaan mallien riittämättömyyttä ennustaa tapahtumia, vääränlaisia parametreja ja mittausvirheitä. (Hallegatte et al. 2012.) Ensimmäistä kausaalisuutta voisi kuvata esimerkiksi suuri luonnonmullistus ja jälkimmäistä pankkisektorin ennustamaton laajamittainen kriisi tai uhkaava ilmastonmuutos, jonka laajuutta ja voimakkuutta mallit eivät kykene mallintamaan.

Harry Markowitzin (Markowitz 1952) katsotaan olevan esi-isä modernille portfolioteorialle, jossa riskin ja tuoton nähdään kulkevan käsi kädessä. Siinä riskiä mitataan tuottojakauman keskihajonnalla eli volatilitetillä, jonka suhteen portfolion valinta suoritetaan. Markowitzin työn on sanottu olevan Knightin työn operationalisointi, jossa hän toi knightilaisen riskin käsitteen yhteen riskimittariin (varianssi). Modernissa portfolioteoriassa korostuukin hajauttamisen tuoma hyöty, minkä avulla portfolion varianssia – eli knightilaista riskiä – pyritään minimoimaan, jäljelle jääden vain systemaattinen markkinariski, joka ei poistu hajauttamalla⁵. Järjestelmällisen riskienhallinnan voidaan katsoa alkaneen Markowitzin työstä ja häntä voidaankin pitää myös kokonaisvaltaisen riskienhallinnan oppisänä.

3.1 Riskimittareiden taustaa

Riskimittari voidaan nähdä lukuna, jota käytetään kuvaamaan portfolioon tai kohde-etuuteen kohdistuvaa riskiä suhteessa sen riskifaktoreihin. Ne voidaan karkeasti jakaa (1) *aineistosta poikkeaviin*- ja (2) *tappiomittareihin*. Edellisistä kenties yleisimmin käytettyjä riskimittareita ovat korrelaatio ja aikaisemmin mainittu varianssi, joka määritellään odotusarvona keskiarvopoikkeamien neliöille

$$\sigma^2 = E[(X - E(X))^2]. \quad (3)$$

Ne eivät kuitenkaan yleisyydestään huolimatta ole koherentteja riskimittareita, paitsi silloin kun riskifaktorit ovat multinormaalijakautuneita (Alexander 2008, 1). Muita hajontamittareita on myös käytetty, joista merkittävin lienee keskiarvopoikkeama (mean difference), joka määritellään

⁵ Hajautettavissa olevaa markkinariskiä kutsutaan epäsystemaattiseksi riskiksi.

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - y| f(x) f(y) dx dy \quad (4)$$

ja tunnetaan myös Gini-kertoimen nimellä. Yitzhaki (2002) osoittaa, että mittarilla on paljon samoja ominaisuuksia kuin varianssillakin, mutta se on samalla informatiivisempi ei-normaaleille jakaumille ja sen matemaattiset ominaisuudet ovat ylivertaisia verrattuna varianssiin. Sitä voidaan esimerkiksi käyttää toisen asteen stokastisen dominanssin ehtojen täyttymiseen toisin kuin varianssia⁶. Tämä on varsin tärkeää erityisesti taloustieteen sovelluksissa.

Tappiomittareita on myös pyritty kehittämään kuvaamaan riskiä. Yksi käytetyistä on Markowitzin (1959, 188) ehdottama semi-variassi, jossa huomioidaan vain tuottojakauman tappiolliset esiintymät. Semi-variassi määritellään

$$SV(X) = E[(\min(X - E(X), 0))^2] \quad (5)$$

tai yleisemmin

$$= \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - X)^2 f(x) dx. \quad (6)$$

Jos tuottojakauman oletetaan olevan normaalisti jakautunut, kuten usein käytännössä tehdään, on semi-variassi suoraan johdettavissa varianssista, mikä vähentää sen käytön houkuttelevuutta. Mikäli taas normaalijakaumaoletuksesta joustetaan ja kolmas (vinous) ja neljäs (huipukkuus) momentti jakaumasta ovat estimoitavissa, on semi-variassin käyttö perustellumpaa. Se ei kuitenkaan kerro mitään koko jakauman muodosta, eikä erittäin epätodennäköisten tuottojen mahdollisuudesta.

Domar ja Musgrave (1944) lähestyvät riskiä tappion odotusarvolla ja määrittävät portfolion tappion

$$r = - \sum_{i=1}^k q_i p_i, \quad (7)$$

⁶ Oletetaan, että u on hyötyfunktio ja heikosti kasvava, F ja G ovat yleisiä jakaumafunktioita välillä $[a, b]$ siten, että $F(a) = 0 = G(a)$ ja $F(b) = 1 = G(b)$. Nyt

ensimmäisen asteen stokastinen dominanssilla tarkoitetaan, että arpajaisissa, joissa F dominoi G :tä, pelaaja valitsee aina jakauman F riippumatta hyötyfunktion u muodosta, kunhan se on heikosti kasvava.

Toisen asteen stokastisella dominanssilla tarkoitetaan, että pelaaja valitsee F :n vain, jos u on heikosti kasvava ja pelaaja on riskiaversiivinen.

jossa q on tuoton odotusarvo ja p on tuoton todennäköisyys siten, että $q_i < q_{i+1}$ ja $q_k = 0$. He siis jakavat kokonaistuoton positiiviseen ja negatiiviseen komponenttiin, jotka summautuvat kokonaistuotoksi.

Royn (1952) niin kutsuttu Safety First -mittari minimoi todennäköisyyden, että jokin tappioraja ylitetään. Royn mukaan se on

$$P(m - \xi \geq m - d) = P(\xi \leq d) \leq \frac{\sigma^2}{(m - d)^2}, \quad (8)$$

jossa m on odotettu tuotto, ξ on todellinen tuotto, d on lopullinen eksplisiittisesti annettu tuottoraja ja σ^2 varianssi. Ideana on minimoida $P(\xi \leq d)$ käyttäen yhtälöä $\frac{\sigma^2}{(m-d)^2}$, tai vaihtoehtoisena ongelmana voidaan maksimoida sen käänteisversio $\frac{(m-d)^2}{\sigma^2}$.

Mielenkiintoiseksi eri riskimittarit tulevat, kun ymmärtää niiden samankaltaisuuden. Stone (1973, 3) yleisti useimmat esitetyt riskimittarit yleiseksi *kolmen parametrin mittariksi* seuraavasti:

$$L(W_0, k, A) = \int_{-\infty}^A |W - W_0|^k df(W), \quad k \geq 0, \quad (9)$$

jossa W_0 on viitetaso, jonka suhteen vertailu tehdään ja k on potenssi, johon poikkeamat viitetasosta korotetaan ja täten se määrittää myös poikkeamien suhteellisen voimakkuuden. A on välimatkaparametri, joka esimerkiksi yllä esitetyssä Domarin ja Musgraven riskimittarissa olisi k . Stonen yleistys on havainnollistava, koska se kertoo useimpien riskimittareiden polveutuvan toinen toisistaan. Esimerkiksi varianssin saadaan Stonen yhtälöstä, kun A asetetaan äärettömäksi ∞ , potenssi $k = 2$ ja W_0 asetetaan odotusarvoksi μ . Samoin semi-varienssi saadaan samalla tavalla kuin varianssi, kun A vain muutetaan odotusarvoksi μ . Riskimittareissa pitääkin ymmärtää syvemmin, mitä ne mittaavat, eikä vain keskittyä niiden arvoihin.

Myöhemmin tarkemmin esitettävät Value at Risk -mittarit ovatkin muun muassa Stephen Ryanin (2011) mukaan lähempänä knightilaista riskin määritelmää kuin ei-mitattavissa olevaa epävarmuuden määritelmää. Toisaalta VaR lasketaan karkeasti ottaen historiallisesta aineistosta, joten voisi kuvitella sen sisältävän informaatiota kokonaisriskistä ja täten myös knightilaisesta epävarmuudesta. Historiallinen data ei kuitenkaan usein vastaa nykytilaa, jolloin kulloinkin estimoidun VaR-mittarin sisältämä

knightilainen epävarmuusestimaatti on ikään kuin jo vanhentunut. Samoin tapahtumat, jotka voidaan luokitella knightilaiseksi epävarmuudeksi ovat usein niin harvinaisia, että ne tapahtuvat vain kerran ihmisen elämässä ja mahdollisesti kerran koko ihmiskunnan aikana. Sitä ei kuitenkaan tule sekoittaa suoraan Talebin (2010) mustan joutsenen teoriaan, jolla viitataan vain erittäin epätodennäköisten tapahtumien esiintymiseen ja paksuihin häntiin.

Winston & Scherer (2012, 405) kertovat kirjassaan, että matemaattisen rahoituksen alalla on tämän suhteen tehty virheitä arvioiden, että markkinat heijastavat knightilaista riskiä, kun todellisuudessa ne heijastavat knightilaista epävarmuutta. Tästä on syntynyt ongelmia pankkien kehittäessä uusia finanssi-innovaatioita, joiden riskisyys perustuu enemmän tai vähemmän historialliseen dataan (HBR 2009). Esimerkiksi yhtiön tuodessa uuden tuotteen markkinoille, sen kysyntää on vaikea estimoida, koska historiallista dataa ei ole saatavilla. Samoin uuden yhtiön listauduttua pörssiin ei osakekursi-historiaa ole olemassa. Muun muassa näiden syiden vuoksi on tärkeää, että ymmärrämme, mitä todella mittaamme.

3.2 Riskimittarin vaatimukset

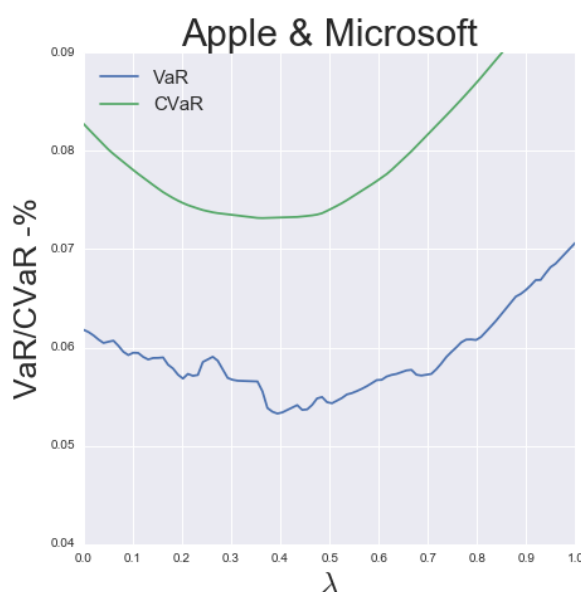
Yleisesti, jotta riskimittari voidaan hyväksyä ja kutsua sitä *koherentiksi*, sen täytyy täyttää neljä aksioomaa (Artzner et al. 1999; Alexander s. 38–39):

1. *Siirtainvarianssi* $\rho(A + \gamma) = \rho(A) - \gamma$,
2. *Homogeenisuus* $\rho(kA) = k\rho(A)$,
3. *Subadditiivisuus* $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$,
4. *Monotonisuus* $\rho(A) \leq \rho(B)$, kun $A \leq B$.

Siirtainvarianssi tarkoittaa, että esimerkiksi portfolioon A lisätty riskitön asset (varallisuusesine) γ pienentää kokonaisriskiä γ :n verran. *Homogeenisuus* tarkoittaa sitä, ettei riski riipu käytettävästä yksiköstä (esim. valuutasta). *Subadditiivisuus* taas, ettei hajauttamalla ainakaan voida lisätä kokonaisriskiä. *Monotonisuudella* tarkoitetaan sitä, että korkeammasta panoksesta seuraa myös korkeampi riski.

Yleisesti ottaen Value at Risk ei täytä koherentin riskimittarin vaatimuksia muulloin kuin tuottojen ollessa normaalijakautuneita, tai yleisemmin elliptisesti jakautuneita. Kuitenkin tiedetään ainakin jo Faman (1963) ja Mandelbrotin (1963) ajoilta, että tuotot eivät ole normaalisti jakautuneita vaan vähintäänkin paksuhäntäisiä. VaR rikkookin subadditiivisuuden aksioomaa, mistä seuraa, ettei hajauttamalla välttämättä saavuteta toivottua vaikutusta ja portfolion kokonaisriski voi jopa nousta.

Tämä voidaan nähdä kuvaan 1 piirretystä Applen ja Microsoftin osakkeita sisältävän portfolion $Var(x)$ - ja myöhemmin esiteltävän $CVaR(x)$ -funktioista painojen λ suhteen, joissa $x = x_1\lambda + x_2(1 - \lambda)$, $\lambda : [0,1]$. Kuten kuvasta havaitaan, on CVaR globaalisti ylempänä kuin VaR. Samoin CVaR on vahvasti konvekksi toisin kuin VaR, jossa esiintyy useita lokaaleja minimejä. Subadditiivisuus tuleekin kuvasta esille CVaR:n vahvana konveksisuutena, joka VaR:n kohdalla joudutaan hylkäämään. VaR:n minimointi onkin helpompaa minimoimalla CVaR. Prosessin sivutuotteena saadaan myös VaR-luku, koska kummankin minimi ovat usein hyvin lähellä toisiaan.

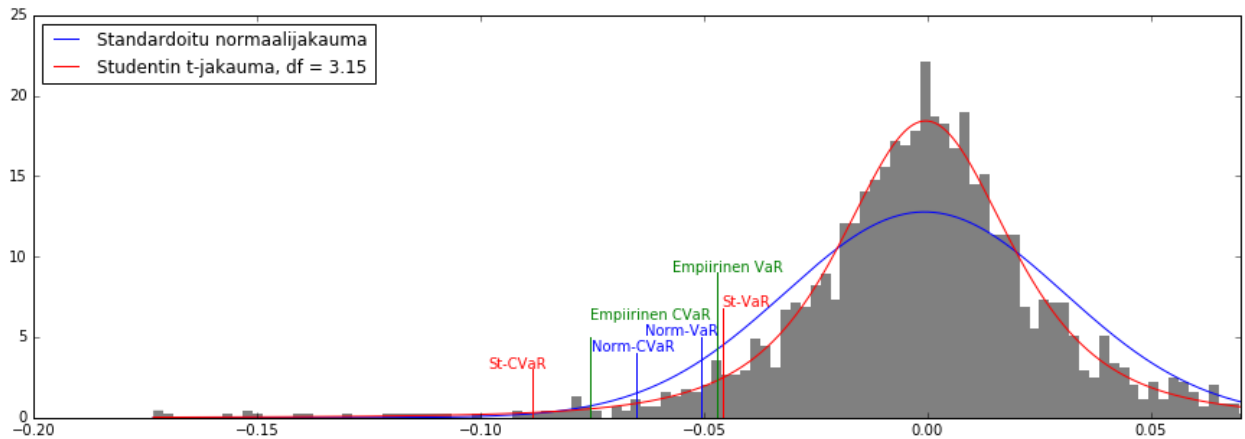


Kuva 1. Applen ja Microsoftin osakkeiden VaR ja CVaR painojen funktiona.

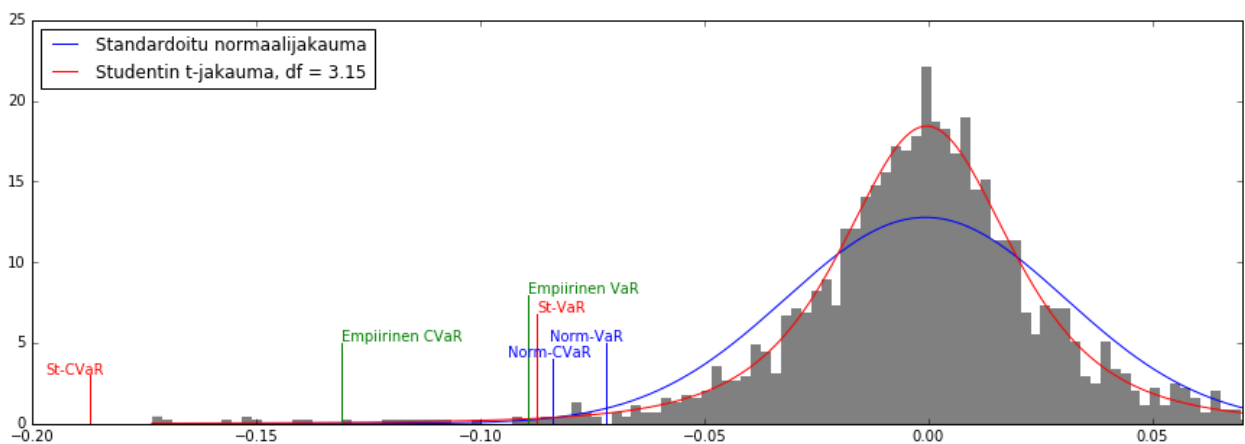
3.3 Value at Risk

Value at Risk on alun perin pankkiiriliike J. P. Morganin kehittämä mittari riskille. Tavanomaisessa modernissa portfolioteoriassa riskiä mitataan varianssilla. VaR taas kertoo, kuinka paljon jokin portfolio voi jollakin annetulla riskitasolla menettää arvoaan annetulla ajalla.

Menetelmiin palataan tarkemmin myöhemmin, mutta seuraaviin kuviin (kuvat 2 ja 3) on piirretty havainnollisuuden vuoksi sekä Value at Risk- että Conditional Value at Risk -mittareiden arvot kahdella eri luottamustasolla ($\beta = 0,99$, $\beta = 0,95$) Nokian osakkeen tuottojakaumalle aikavälillä 1.12.2007 ja 1.12.2015. Riskimittareiden arvot on laskettu empiirisestä jakaumasta estimoidusta normaalijakaumasta ja Studentin t-jakaumasta, jolle saatiin vapausasteiksi 3,15.



Kuva 2. Nokian tuottojakauman VaR ja CVaR, $\beta = 0,95$



Kuva 3. Nokian tuottojakauman VaR ja CVaR, $\beta = 0,99$

Kuten kuvista voidaan havaita, niin toisin kuin normaalijakauma, istuu estimoitu Studentin t-jakauma suhteellisen hyvin empiiriseen jakaumaan. Samoin tulee ilmi tärkeä havainto, että normaalijakaumasta ja Studentin t-jakaumasta laskettavat VaR ja CVaR saattavat erota toisistaan huomattavasti ja niiden suuruusjärjestys muuttuu jossain pisteessä päälaelleen eri vapausasteilla ja luottamustasoilla. Tämä johtuu tietysti siitä, että Studentin t-jakauman todennäköisyysmassa on hännissä suurempi, eli suuria heilahduksia keskiarvosta tapahtuu siinä useammin kuin normaalijakaumassa, ja sen muoto muuttuu, kun vapausasteet muuttuvat.

Toinen tärkeä huomio on, että vaikka havaintoja on hieman yli 2000, on estimoidusta Studentin t-jakaumasta laskettava 99 %:n CVaR-mittari hyvin kaukana muilla tavoin lasketuista mittareista. Tämä johtuu luonnollisesti siitä, että aineistossa luottamustasolle 99 % kuuluu havaintoja vain noin 20 ja siitä, että vuoden 2008 huomattava laskumarkkina osuu aikavälille. Kuviiin on myös piirretty vertailun vuoksi vihreällä suoraan empiirisestä jakaumasta saatu VaR ja CVaR. Havaitaankin, että mittarit an-

tavat samansuuntaisia tuloksia pienemmillä luottamustasoilla, kun taas luottamustason noustessa niiden erot kasvavat, mikä osaltaan tuo ongelmia oikean mittarin ja menetelmän valintaan. Näihin kysymyksiin palataan tarkemmin myöhemmin, mutta ensin johdetaan VaR- ja CVaR-mittarit matemaattisesti.

Value at Riskin matemaattinen esitys aloitetaan määrittämällä tappiofunktio. Esitys noudattaa pitkälti Rockafellarin ja Uryasevin (2002) esitystä.

Olkoon $f(x, y)$ tappiofunktio, jossa x on päätösvektori esimerkiksi portfoliossa olevien assettien painoista ja y satunnaisvektori esimerkiksi tuotoista, jonka todennäköisyysjakauma on $p(y)$. $f(x, y)$ on jatkuva x :n suhteen ja mitattavissa y :n suhteen. Tällöin todennäköisyys, että tappio $f(x, y)$ ei ylitä jotakin annettua rajaa a on

$$\Psi(x, a) = \int_{f(x, y) \leq a} p(y) dy, \quad (10)$$

jossa $\Psi(x, a)$ on kumulatiivinen todennäköisyysjakauma tappiosta x :n suhteen. Tappiofunktio $f(x, y)$ voi tietysti olla myös negatiivinen, jolloin kyse on tuotosta⁷. Usein $p(y)$ ajatellaan olevan normaalijakautunut, mutta sen ei tarvitse olla. Täten $\Psi(x, a)$ määrittelee yksiselitteisesti portfolion tuoton, josta VaR ja CVaR voidaan laskea. Jakaumasta $p(y)$ ei tarvitse myöskään tehdä oletuksia, riittää, että siitä voidaan generoida satunnaisotantoja, joiden avulla VaR ja CVaR estimoidaan. Tällöin esimerkiksi empiiristä jakaumaa ei tarvitse estimoida vaan itse empiiristä jakaumaa voidaan käyttää.

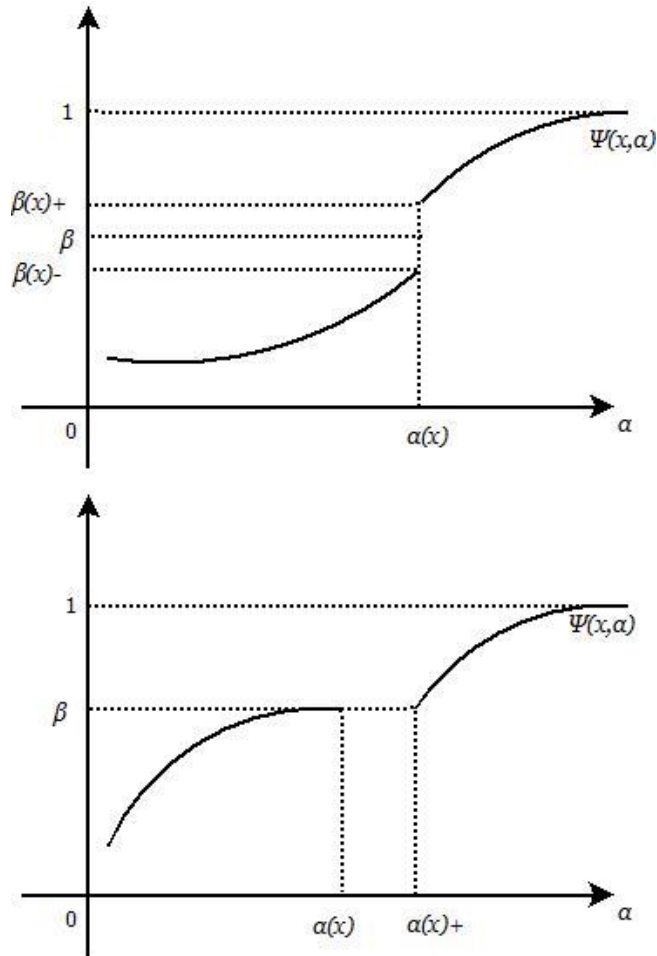
Yhtälöstä (10) VaR määritellään portfolion tappiona päätösvektori x suhteen

$$a_\beta(x) = \min\{a \mid \Psi(x, a) \geq \beta\}, \quad (11)$$

jossa β on luottamustaso välillä $(0, 1)$. Usein luottamustasona käytetään $\beta = 0,95$ tai $\beta = 0,99$. Minimiehto tulee siitä, että $\Psi(x, a)$ ei välttämättä ole jatkuva, vaan funktiossa voi esiintyä hyppäyksiä. Sama asia on esitetty graafisesti seuraavassa kuvassa (kuva 4), jossa kohdassa $a_\beta(x)$ tapahtuu

⁷ Uryasevin ja Rockafellarin esityksessä käytetään tappiofunktioita VaR:n ja CVaR:n laskemiseen, mutta yhtä lailla voidaan käyttää koko riskifaktorin jakaumaa välillä $(-\infty, \infty)$. Tällöin laskenta hieman muuttuu, mutta on luonnollisesti perusidealtaan identtinen.

hyppäys eikä funktio $\Psi(x, a)$ ole määritelty. Samalla VaR saa saman arvon välillä β^+ ja β^- , jolloin VaR on siis määritelmällisesti minimi näistä.



Kuva 4. Ylemmässä kuvassa tappiofunktiossa tapahtuu hyppäys vertikaalisesti, jolloin VaR on tältä väliltä määritelmällisesti minimi. Alemmassa kuvassa hyppäys tapahtuu horisontaalisesti, jolloin VaR on määritelmän mukaan $a_\beta^+(x)$.

Samoin on mahdollista, että hyppäys funktiossa $\Psi(x, a)$ tapahtuu horisontaalisesti, jolloin VaR saa liukuman arvoja välillä $a_\beta(x)$ ja $a_\beta^+(x)$, jolloin β -VaR määritellään

$$a_\beta^+(x) = \inf\{a | \Psi(x, a) > a\}. \quad (12)$$

Eli toisin sanoen β -VaR on pienin $a_\beta(x)$ ehdolla, että $\Psi(x, a)$ on suurempi kuin a , kuten kuvan (4) alemmassa kuvaajassa.

3.4 Conditional Value at Risk/Expected Shortfall

Value at Riskin käyttö portfolion optimoinnissa on haasteellista, koska se ei ole vahvasti konvekssi päätösvektorin x suhteen. Tästä seuraa, ettei yksiselitteistä globaalia minimiä välttämättä ole löydettävissä. VaR ei myöskään kerro mitään jakauman loppuhännästä. Edellä mainittujen syiden vuoksi on yleisesti suositeltu Conditional Value at Risk -mittarin käyttöä, joka ottaa myös jakauman hännän huomioon. CVaR-mittarista käytetään myös nimityksiä Expected Shortfall, Tail VaR, Mean Excess Loss, Average Value at Risk ja Mean Shortfall. Kaikilla tarkoitetaan usein samaa asiaa, eroina saattaa olla vain vertailuoperaattori ehdollisessa odotusarvossa, eli VaR-rajalla. Käytännön sovellutuksissa niillä ei kuitenkaan ole juuri merkitystä otoskoon kasvaessa suureksi.

Määritelmällisesti CVaR on tappion odotusarvo ehdolla, että VaR-rajaa on ylitetty. Matemaattisesti se esitetään integraalin keskiarvona VaR-rajan ylittävistä tappioista

$$\Phi_{\beta}(x) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(x,y) \geq a_{\beta}(x)} f(x,y) p(y) dy, \quad (13)$$

mikä tarkoittaa sitä, että vain VaR-rajan ylittävät tappiot huomioidaan. Intuitiivisempi esitystapa on Jorionin (2007, s. 91) tarjoama muoto

$$E(X|X \leq q) = \frac{\int_{-\infty}^q x f(x) dx}{\int_{-\infty}^q f(x) dx}, \quad (14)$$

jossa q on fraktiili, esimerkiksi 5 % riskitasolla likimain 1,645 ja X on satunnaismuuttuja. Integroimalla yhtälö (14) saadaan esimerkiksi standardoidun normaalijakauman tilanteessa

$$E(x|x < -q) = \frac{-\Phi(q)}{F(-q)}, \quad (15)$$

jossa $-\Phi(q)$ on normaalijakauman tiheysfunktion⁸ arvo kohdassa q , $F(-q)$ on kertymäfunktion arvo kohdassa $(-q)$.⁹

Yllä olevat esitykset ovat tärkeitä, varsinkin jos CVaR:n laskemiseen käytetään parametrisia menetelmiä. Käytännön sovelluksissa joudutaan turvautumaan usein empiiriseen diskreettiin jakaumaan, jotta ylläolevat esitykset täytyy esittää diskreetissä muodossa.

Määritellään $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ realisaatioiksi satunnaismuuttujalle X ja $q = Q\% \in (0,1)$ prosentiosuudeksi otannasta, minkä jälkeen järjestetään satunnaismuuttuja X suuruusjärjestykseen siten, että $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$. Tämän jälkeen Expected Shortfall määritellään

$$ES_n^q(X) = - \frac{\sum_{i=1}^w X_{i:n}}{w}, \quad (16)$$

jossa $w = nq$. ES vastaa siis kysymykseen, mikä on odotettu tappio $Q\%$ osassa huonoimmista realisaatioista. (Acerbi & Tasche 2001, 5.)

ES voidaan määritellä myös seuraavalla tavalla, jolloin se on myös identtinen CVaR:n kanssa (Acerbi 2002):

$$CVaR_q(X) = \frac{1}{q} \int_0^q VaR_a(X) da = ES_q(X) \quad (17)$$

Usein CVaR- ja ES -mittareista puhutaankin synonyymeina, mutta tarkasti ottaen ne eroavat toisistaan hieman. ES määritelläänkin $CVaR^+(X) = E[X|X > VaR_\beta(X)]$, eli se on niin sanottu upper-CVaR, erona vain yhtäsuuruuden puuttuminen ehdollisesta odotusarvosta verrattuna esimerkiksi esitykseen (14).

⁸ Normaalijakauman tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

⁹ Studentin t-jakaumalle CVaR saadaan sen tiheysfunktion integraalina väliltä $[-\infty, q]$ kertaa x , eli

$$CVaR_t = \int_{-\infty}^q x f(x) dx = \int_{-\infty}^q x \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \sqrt{\pi B v}} \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{B v}\right)^{-\frac{1+v}{2}}, \quad v > 1,$$

jossa B on betafunktio, joka tavallisesti oletetaan ykköseksi, Γ on gammafunktio ja v on vapausasteet (esim. Andreev & Kanto, 2004).

4 Metodit VaR- ja CVaR-mittareiden laskemiseksi

VaR ja CVaR voidaan laskea karkeasti kolmella eri tavalla, (1) niin kutsutulla *varianssi-kovarianssi-metodilla*, (2) *historiallisella simuloinnilla* ja (3) *Monte Carlo -simuloinnilla*. Kaikista menetelmistä on lukuisia eri variaatioita ja yhdistelmiä, samoin niissä jokaisessa on omat hyvät ja huonot puolensa.

Käytännön sovelluksissa joudutaan usein turvautumaan historiallisiin aineistoihin, joko estimoidessa aineiston parametreja tai käytettäessä suoraan empiiristä jakaumaa. Tällöin vaihtoehtoisia lähestymistapoja on monia. Usein joudutaan tekemään oletuksia riskifaktorien jakaumien muodoista, joko olettamalla ne normaaleiksi tai vaihtoehtoisesti estimoimalla niiden parametreja (varianssi, vinous ym.). Normaalijakauma oletus on luonteva ja antaa usein riittävän tuloksen, mutta se ei ota huomioon erittäin epätodennäköisiä tapahtumia, minkä vuoksi sen käyttö päätöksenteossa on kyseenalaista. Jo pienillä muutoksilla, esimerkiksi siirtymällä normaalijakaumasta Studentin t-jakaumaan, saadaan merkittäviä hyötyjä VaR- ja CVaR-estimointiin.

Samoin voidaan pyrkiä arvioimaan erittäin epätodennäköisten tapahtumien jakaumaa ääriarvoteorialla. Siinä jakauman häntää pyritään mallintamaan esimerkiksi yleistetyllä Pareto-jakaumalla, jota estimoidaan suurimman uskottavuuden menetelmällä (esim. Gilli & Këllezi 2006).

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää Monte Carlo -simulointia, jossa simuloidaan satunnaiskulkua ennalta määrätyillä parametreilla useilla kymmenillä tuhansilla otannoilla, minkä pohjalta VaR ja CVaR voidaan laskea. Monte Carlon etuna on se, että sillä voidaan simuloida lähes minkä muotoista jakaumaa tahansa. Voidaan esimerkiksi estimoida aineistosta $GARCH(q, p)$ -parametrit, joita hyödyntämällä on mahdollista simuloida satunnaisotanta ja käyttää sitä VaR- ja CVaR-mittareiden laskemisen apuna.

Monte Carlon ongelmana on, että se vaatii nopeasti otoskoon kasvaessa massiivisia tehoja tietokoneelta. Se voi kuitenkin olla ainoa järkevä vaihtoehto laskettaessa epälineaaristen, esimerkiksi johdannaisia sisältävien portfolioiden VaR- ja CVaR-mittareita. Seuraavaksi käydään tarkemmin läpi eri menetelmiä mittareiden laskemiseksi.

4.1 Historiallinen VaR/CVaR

Kun Value at Risk lasketaan historiallisesta datasta, kyseessä on parametrin estimointi, ja se on mahdollisesti yleisin käytetyistä menetelmistä. Vuonna 2006 kolme neljästä pankista käytti sitä, todennäköisesti sen helppokäyttöisyyden vuoksi (Alexander 2008, 141). Käytettäessä historiallista dataa jakaumasta ei tarvitse tehdä oletuksia, ja samalla kaikki kompleksit riskifaktoreiden väliset dynaamiset riippuvuussuhteet tulevat estimoiduksi endogeenisesti.

Historiallinen VaR ja CVaR saadaan yksinkertaisesti asettamalla portfolion tuotot suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan, minkä jälkeen yhden päivän VaR on $1 - \beta$ % -fraktiili ja CVaR sen painotettu keskiarvo.

Useamman päivän VaR:n laskemiseen käytetään usein niin sanottua neliöjuurisääntöä, jossa VaR tai CVaR skaalataan useammalle päivälle niin, että se kerrotaan päivien neliöjuurella. Sääntö on tosin voimassa vain, kun riskifaktori noudattaa brownilaista satunnaiskulkua¹⁰.

On kuitenkin useita syitä, miksi historiallisen VaR:n käyttöön kannattaa suhtautua varauksella. Ensinnäkin mennyt ei ole tae tulevasta. Historiallista dataa käytettäessä tehdään vahva oletus siitä, että mennyt toistaa itseään, mutta jos aiempaa dataa on vain rajallisesti saatavilla, saattavat keskivirheet muodostua suuriksi ja tulokset epäselviksi. Jos aineistoa on esimerkiksi tuhannen päivän ajalta ja tarkoituksena on määrittää 99 %:n VaR, niin aineistossa näitä havaintoja on vain kymmenen. Samoin, vaikkei aineiston saatavuus olisi ongelma, voidaan kysyä, miten kaukaisilla havainnoilla on enää käytännön merkitystä. Esimerkiksi yksittäisen yrityksen kohdalla on pohdittava, onko sen riskisyys enää sama kuin kymmenen vuotta sitten, jos sen koko on kaksinkertaistunut tai se on vaihtanut toimialaa. Lisäksi epästationaariselle satunnaiskululle, jota osakekurssit usein noudattavat, on myös tavanomaista pitkäaikaiset trendit. Jos riskimittari lasketaan vahvasti nousevasta trendiaikakaudesta, voi saatu tulos aliarvioida todellista riskiä huomattavasti.

¹⁰ Jos havainnoissa taas on esimerkiksi autokorrelaatiota, tulee skaalauskerroimeksi \sqrt{h} :n sijaan

$$\sqrt{h} = h + 2 \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} [(h - 1)(1 - \rho) - \rho(1 - (\rho^{h-1}))],$$

jossa ρ on autokorrelaatiokerroin. (Alexander 2008, s. 61)

Useimmat ongelmat syntyvät oletuksesta, että kaikille havainnoille annetaan yhtä suuri painoarvo, mutta näin ei tarvitse olla. Voidaan käyttää esimerkiksi eksponentiaalisesti liukuvan keskiarvon painotusta (Exponential Weighted Moving Average, EWMA), jolloin lähempänä nykyhetkeä olevat havainnot saavat suuremman painoarvon ja kaukaisemmat pienemmän. Tällöin määritellään pehmenysvakio ω , jolle annetaan arvo väliltä $[0, 1]$. Nyt viimeisimmälle havainnolle annetaan painoarvo $1 - \omega$ ja sitä seuraaville $\omega^2(1 - \omega), \omega^3(1 - \omega), \dots$ ja niin edelleen. Näin painot summautuvat aina ykköseksi ja EWMA-funktion jyrkkyyttä voidaan säädellä valitsemalla sopiva arvo ω :lle. Kun ω :n arvo lähenee ykköstä, pienenee lähellä nykyhetkeä olevien havaintojen painoarvo ja kaukana nykyhetkestä olevien kasvaa suhteellisesti. (Alexander 2008, 157)

Cabedo ja Moya (2003) esittivät määrittäessään VaR:ia öljyn hinnalle selkeän tavan, jolla yksinkertaista historiallista menetelmää voidaan parantaa. He estimoivat ensin ARMA-mallin öljyn hinnan vaihtelulle, jonka avulla he pystyivät ennustamaan sen varianssia. Tämän jälkeen he käyttivät sitä informaatiota ennustaessaan öljyn tulevia tuottoja, joista VaR laskettiin. Kyseisen menetelmän etu on, ettei edelleenkään tarvitse tehdä oletuksia historiallisesta tuottojakaumasta ja tulokset ovat tarkempia kuin suoraviivaisessa menetelmässä, joka ei ota huomioon ajassa muuttuvaa varianssia. Toisaalta menetelmää ei voida kutsua enää parametrittömäksi ARMA-mallin parametrien estimoinnin jälkeen.

Kaikissa variaatioissa jäljelle jää kuitenkin aina ongelma, mitä aikasarjaa käytetään tai mikä arvo pehmenysvakiolle ω valitaan. Korkean volatiliteetin aikana VaR ja CVaR tulevat korkeammiksi kuin matalan volatiliteetin aikana. Aikasarjan valinnalla voikin olla huomattava vaikutus lopputulokseen.

4.2 Varianssi–kovarianssi-menetelmä

Varianssi–kovarianssi-menetelmä tunnetaan myös useilla muilla nimillä, joista yleisimmät ovat delta–normaali-menetelmä ja parametrinen VaR. Delta-sanalla on kuitenkin optiohinnoittelussa vakiintunut asema ja se antaa vaikutelman siitä, että VaR on lineaarisessa suhteessa riskifaktoreihin. Kun VaR:ia tai CVaR:ia lasketaan johdannaisia sisältävälle portfoliolle, ei kuitenkaan voida puhua lineaarisesta VaR:ista. Erotuksena lineaarisesta tapauksesta puhutaankin delta–gamma-menetelmästä, kun halutaan mallintaa epälineaarisia riskisuhteita (Damodaran, 2007). Samoin sana ”normaali” on harhaanjohtava, koska riskifaktorin jakauman ei tarvitse olla normaalijakautunut, se voi olla myös log-normaali- tai Studentin t-jakautunut. Siksi usein suositetaan nimeä varianssi–kovarianssi-menetelmä.

Varianssi–kovarianssi-menetelmässä käytetään suoraviivaisesti VaR:n ja CVaR:n aikaisemmin esitetyjä matemaattisia määritelmiä. Nyt joudutaan tekemään oletus riskifaktorin jakaumasta tai estimoimaan sen parametrit, jotta analyttinen ratkaisu on mahdollinen.

Jos jakauman muodoksi oletetaan normaalijakauma, supistuu ongelma löytää VaR yhden assetin tapauksessa laskemiseen $(1 - \beta)$ fraktiili normaalijakaumasta, jossa β on luottamustaso. Eli matemaattisesti ilmaistuna

$$1 - \beta = \int_{-\infty}^{X^*} g(x)dx = \int_{-\infty}^{z_{1-\beta}} \Phi(z)dz = N(z_{1-\beta}), \quad \text{jossa } X^* = z_{1-\beta}\sigma + \mu, \quad (18)$$

jossa $g(x)$ on alkuperäinen empiirinen jakauma, joka nyt oletetaan normaalijakaumaksi, $\Phi(z)$ on standardoidun normaalijakauman tiheysfunktio, $N(z)$ on integraali normaalijakaumasta eli kertymäfunktio ja X^* on alin tuotto annetulla luottamustasolla β eli käytännössä VaR-rajana.

Tästä CVaR saadaan Uryasevin ja Rockafellarin mukaan (2000, 29) seuraavasti:

$$CVaR_\beta(X) = E[X|X \geq VaR_\beta(X)] = \mu + k_1(\beta)\sigma, \quad (19)$$

jossa

$$k_1(\beta) = (\sqrt{2\pi}\exp(\text{erf}^{-1}(2\beta - 1))^2(1 - \beta))^{-1} \quad (20)$$

ja

$$\text{erf}(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (21)$$

joka on niin kutsuttu virhefunktio ja muistuttaa läheisesti normaalijakauman kertymäfunktioita, joka on annettu

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (22)$$

Niiden välillä onkin yhteys ja $\Phi(z)$ voidaan esittää virhefunktion $\text{erf}(z)$ avulla

$$\Phi(z) = \frac{\text{erf}(z) + 1}{2}. \quad (23)$$

Ja lopulta, kuten Yamai ja Yoshihara (2002, 61) osoittavat, tiivistyy ylläesitetty yksinkertaisempaan muotoon

$$CVaR_\beta(X) = \frac{e^{\frac{q_{1-\beta}^2}{2}}}{(1-\beta)\sqrt{2\pi}}\sigma_X, \quad (24)$$

joka taas on hyvin lähellä aikaisemmin esitetyn Jorionin kaavan (14) kanssa; erona on vain satunnaismuuttujan keskihajonnan lisääminen yhtälöön, jonka Jorion asetti ykköseksi standardoidun normaalijakauman vuoksi.

Kuten yllä olevista nähdään, VaR ja CVaR ovat suoraan johdettavissa normaalijakauman parametreista ja näin myös toinen toisistaan. Esimerkiksi asettamalla $\beta = 0.99$ eli ottamalla sadasosa-fraktiili normaalijakaumasta, tulee keskihajonnan kertoimeksi 2,67, joka on sama kuin 0,996-VaR. Tästä johtuen CVaR ei ole mielekäs mittari, kun tuottojen jakaumaksi oletetaan normaalijakauma tai yli-päättänsä elliptinen jakauma, koska VaR sisältää jo itsessään saman informaation kuin CVaR.

Portfolion laskemiseen yllä oleva kaava ei suoraan sovellu, koska riskifaktoreilla on usein korrelaatioita toistensa kanssa. Tällöin joudutaan ensin laskemaan riskifaktorien (esim. tuottojen) varianssi-kovarianssimatriisi, josta saadaan portfolion varianssi ja kovarianssit.

Oletetaan eri assettien tuottojen jakaumat edelleen normaaleiksi ja määritetään x_i assetin i tuotoksi ja w_i assetin i painoksi portfoliossa, jossa $i = 1, \dots, N$ siten, että

$$X_P = \sum_{i=1}^N w_i x_i, \quad \text{jossa } \sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad \text{ja } w_i \geq 0.$$

Portfolion tuotto X_P voidaan esittää matriisimuodossa

$$X_P = w^T X,$$

josta varianssi $V(X_P)$ saadaan

$$V(X_P) = w^T \Sigma w,$$

jossa w^T on pystyvektori portfolion assettien painoista ja Σ on varianssi-kovarianssimatriisi siten, että sen diagonaalilla on assettien varianssit ja muualla niiden väliset kovarianssit¹¹. $V(X_P)$ voidaan esittää myös summalausekkeiden avulla seuraavasti:

$$V(X_P) = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (25)$$

jossa ρ_{ij} on i :n ja j :n välinen korrelaatiokerroin. Nyt määritelmän (18) mukaan VaR on

$$VaR_\beta = \Phi^{-1}(1 - \beta) \sqrt{w^T \Sigma w} + w^T E(X), \quad (26)$$

jossa $\Phi^{-1}(1 - \beta)$ on käänteisen kertymäfunktion arvo kohdassa $(1 - \beta)$ standardoidusta normaalijakaumasta, eli fraktiilin arvo kyseisessä kohdassa ja $w^T E(X)$ portfolion tuoton odotusarvo, joka usein oletetaan nolaksi. Esimerkiksi $\Phi^{-1}(0,05) = -1,64485$.

Varianssi–kovarianssi-menetelmän etuna on, että se on nopea laskea, yksinkertainen ja läheisessä suhteessa moderniin portfolioteoriaan, minkä vuoksi se on myös intuitiivinen. Toisaalta joudutaan tekemään suuria rajoituksia riskifaktoreiden jakaumista, mikä vähentää sen käytön houkuttelevuutta todellisessa päätöksenteossa. Se antaa kuitenkin nopeasti teoreettisen kuvan tilanteesta ja ongelmista.

4.3 Monte Carlo -menetelmä

Monte Carlo -metodiin turvaudutaan usein, kun muut tavat tuottavat vääristyneitä arvoja tai niitä ei pystytä laskemaan analyttisesti. Jos tuotoissa oletetaan olevan ajassa muuttuvaa varianssia esimerkiksi jonkin GARCH-perheen mallin mukaisesti, jolloin ne eivät ole i.i.d. eivätkä myöskään normaalijakautuneita, niin analyttistä ratkaisua VaR- tai CVaR-mittareille ei ole saatavilla tai se on huomattavasti alhaisempi kuin todellinen VaR tai CVaR (Alexander 2008, 223). Samoin portfolioissa, joissa riskifaktorit eivät ole lineaarisessa suhteessa riskiin, on analyttinen ratkaisu vaikea, ellei mahdoton.

¹¹ $(\cdot)^T$ tarkoittaa vektorin transpoosia.

Tällöin ainoaksi mahdollisuudeksi jää simuloida jakaumaa tai prosessia ennalta määrätyillä parametreilla, mistä VaR ja CVaR on helpommin laskettavissa. Menetelmä antaaakin analysoijalle lähes vapaat kädet päättää malliin tuomistaan oletuksista.

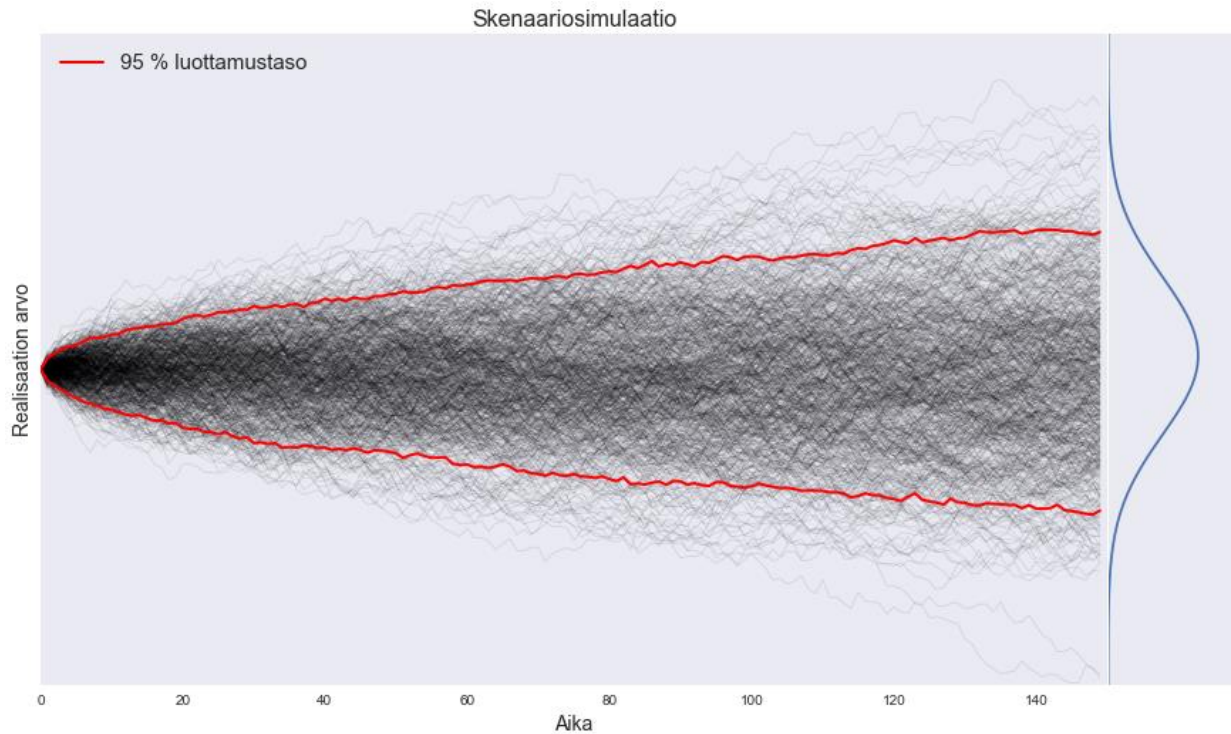
Monte Carlo -menetelmän ideana on simuloida satunnaiskulkuja tietyillä parametreilla riskifaktoreille jostain oletetusta jakaumasta tai satunnaisprosessista. Esimerkiksi simuloimalla 100 satunnaiskulkua on 5 %-VaR viidenneksi alin realisaatio kaikkien tuottojen realisaatioiden jakaumasta ja CVaR 1-5 alimman tuoton keskiarvo. Otantoja tarvitaan paljon, jotta keskivirheet pääsevät konvergoitumaan tarpeeksi pieneksi. Keskeisen raja-arvolauseen mukaan satunnaismuuttujan Y

$$Y = \frac{\hat{X}_N - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}, \quad (27)$$

jakauma konvergoituu standardoiduksi normaalijakaumaksi kun N lähestyy ääretöntä riippumatta \hat{X}_N :n alkuperäisestä jakaumasta. Samoin \hat{X}_N :n jakauma konvergoituu kohti normaalijakaumaa parametreilla $N \sim (\mu, \frac{\sigma^2}{N})$. Tästä seuraa tietenkin, että simuloinnin tarkkuus kasvaa, kun N kasvaa. Virhetermin puolittaminen vaatiikin nelinkertaisen otoksen ja kymmenen kertaa tarkempi virhetermi 100 kertaa suuremman otoksen, kuten neliöjuuren konvergoitumisvauhdilta voi olettaakin. Käytännössä simuloidaan useita kymmeniä tuhansia satunnaiskulkuja, mikä voi olla hidasta, varsinkin jos muuttujia on paljon¹².

Seuraava kuva valaisee menetelmän ideaa enemmän. Ensin määritellään aikahorisontti, jolle satunnaiskulut simuloidaan, jonka jälkeen niiden realisaatiot muodostavat jakauman, josta VaR ja CVaR saadaan suoraan. Tämä on myös Uryasevin et al. (2002) CVaR-optimointimenetelmän taustalla oleva idea, kuten myöhemmin nähdään.

¹² Rajoitteeksi muodostuu tietokoneen laskentabudjetti, johon ei kuitenkaan tässä työssä tutustuta tarkemmin, mutta aiheesta löytyy kattava teos (Glasserman 2003).



Kuva 5. Skenaariosimulaatiossa on simuloitu 700 polkua standardoitua normaalijakaumaa 150 askeleen päähän. Punaisella on piirretty liikkuva 95 % luottamustaso kullakin hetkellä.

Kuten kaikissa menetelmissä, myös Monte Carlo -menetelmässä on huonot puolensa. Suuren laskentatehon lisäksi mallin valinta vaikuttaa huomattavasti lopputulemaan. Menetelmä onkin vain niin hyvä kuin siihen istutettu malli kuvaa todellisuutta. Käytännön työssä mallin valinta ja asiantuntemus sen taustalla maksavat paljon ja vievät aikaa. Sen vuoksi monissa sovelluksissa päätetään olla ottamatta kantaa riskifaktorin jakaumaan ja simuloidaan pelkästään empiiristä jakaumaa. Sen lisäksi, kun riskifaktorien määrä lisääntyy ja niiden dynaamiset riippuvuussuhteet tulevat monimutkaisemmaksi, vaatii se aina lisää simulointoja, jotta estimointivirheet pysyvät alhaisina. Sen vuoksi useiden monimutkaisten riippuvuussuhteiden simuloiminen voi nykytietokoneillakin tulla helposti mahdottomaksi. (Damodaran 2007, 17.)

4.4 Bootstrapping-menetelmä

Bootstrap-menetelmä on historiallisen simuloinnin ja Monte Carlo -menetelmän risteytys. Siinä ideana on ottaa satunnaisotantoja palauttamalla suoraan empiirisestä jakaumasta siten, että jokaisen alkion todennäköisyys tulla valituksi on yhtä suuri. Näin jakauman muodosta ei tarvitse tehdä oletuksia, mutta historialliseen simulointiin verrattuna saadaan tarkempia tuloksia. Selkeä etu, jonka

menetelmä tuo, onkin jakauman paksujen häntien huomioiminen tarkastelussa. Suurten pörssiromahdusten, joita normaalijakauma ei käytännössä koskaan olisi synnyttänyt, tuominen mukaan analyysiin onnistuu helposti. Menetelmä pitää myös riskifaktoreiden korrelaatiot mukana, koska otanta tehdään jokaisesta riskifaktorista samaan aikaan. (Jorion 2007, 314.)

Toisaalta se ei suoraan ota huomioon autokorrelaatiota riskifaktoreissa, vaikka sekin voidaan tuoda menetelmään mukaan esimerkiksi GARCH:ia hyödyntämällä. Se ei myöskään tuo lisäinformaatiota VaR:n ja CVar:n estimointiin. Jos havaintoja on esimerkiksi 1000 ja tarkoituksena on lasketa 1 %-VaR, niin aineistossa 1 %:n fraktilissa on havaintoja vain kymmenen kappaletta. Kun satunnaisotantoja tehdään useita, niin parhaimmillaankin nämä alimmat tuotot tulevat otantaan vain useampaan kertaan, mutta mikä oleellista, niin suurin tappio ei muutu. Näin jakauman häntä on käytännössä aina sama.

5 Portfolio-optimointi

Klassinen keskiarvo–varianssi-menetelmä, josta Harry Markowitz (1952) sai myös Nobel-palkinnon, oli ensimmäinen systemaattinen lähestyminen portfolion optimointiin. Siinä asetettiin sijoittajalle optimointiongelma korkean riskin ja korkean tuoton tai matalan riskin ja matalan tuoton väliselle rintamalle. Sijoittaja oletettiin riskiaversiiviseksi, ja hänen tehtävänsä oli maksimoida oma hyvinvointinsa omien riskipreferenssiensä mukaisesti. Hänen hyötyfunktionsa täytyi olla kvadraattinen tai tuottojen täytyi olettaa noudattavan normaalijakaumaa (mm. Berk 1997). Riskiä mitattiin vain yhdellä tuottojakauman momenteista, varianssilla.

Portfolion optimoinnissa on siis kyse optimaalisista asetien painoista joidenkin preferenssien mukaisesti. Markowitz oletti näiden preferenssien yksinkertaisesti sisältävän varianssin ja tuotto-odotuksen.

On kuitenkin kyseenalaista, miten hyvin jakauman yksin momentti voi selittää sijoittajan riskipreferenssejä. Muun muassa Kraus ja Litzenberger (1976) tulivat jo lähes 40 vuotta sitten tulokseen, että sijoittajilla on preferenssejä myös korkeammille momenteille. Heidän tuloksissaan sijoittajat karttavat varianssia ja suosivat asetteja, joiden tuotoissa ilmenee negatiivista vinoutta¹³. Harvey ja Siddique (2000) jatkoivat tutkimusta ja tulivat samaan tulokseen: jos asetien tuotoissa on negatiivista vinoutta,

¹³ Tarkoitetaan, että jakauman pitkä häntä on negatiiviseen suunta, jolloin harvinaisia suuria miinusmerkkisiä tuottoja on suhteessa enemmän kuin suuria positiivisia tuottoja ja todennäköisyydessä on kallellaan positiiviseen suuntaan.

vaativat sijoittajat niistä korkeampaa keskimääräistä tuottoa. Samoin jos positiivista vinoutta ilmenee, sijoittajat voivat tyytyä jopa negatiiviseen tuotto-odotukseen. Yleisesti sijoittajat maksimoivat paritomia ja minimoivat parillisia momenteja.

Fabozzi et al. (2007, 75) esittävätkin yleistyksen sijoittajan optimointiongelmasta neljälle ensimmäiselle momentille seuraavasti:

$$\max_w w^T \mu - \lambda_1 \sigma_p^2 + \lambda_2 s_p^3 - \lambda_3 \kappa_p^4, \quad (28)$$

jossa λ on riskiaversiivisuuskertoimen¹⁴, s on vinous (*skewness*) ja κ on huipukkuus (*kurtosis*), ehdolla, että

$$w^T \mathbf{1} = 1$$

$$\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1].$$

Yllä oleva esitys luonnollisesti supistuu tavanomaiseen Markowitzin teorian optimointiongelmaan, kun vinoudelle ja huipukkuudelle ei anneta painoarvoa. Keskiarvo-varianssikehikko onkin vain yleisen hyödyn maksimointiongelman erityistapaus, jossa preferenssit korkeammille momenteille oletetaan nolliksi. Teoriassa mikään ei estä ottamasta huomioon myös vielä korkeampia momenteja kuten hypervinous ja -huipukkuus. Käytännössä kuitenkin korkeilla momenteilla estimointivirheet kasvavat nopeasti¹⁵ ja tarpeeksi isoa dataa voi olla hankala saada varsinkaan aikasarja-aineistoista. Siksi usein korkeamman kuin neljännen momentin käytännön sovellukset ovat harvinaisia.

Kahnemanin ja Tverskyn (1979; 1992) kehittämä prospektiteoria eroaa yllä esitetystä normatiivisesta odotetun hyödyn teoriasta, jossa sijoittajan ajatellaan toimivan tiettyjen sääntöjen mukaan ja keskittyvän vain loppuvarallisuuteen. Prospektiteoriassa sijoittajan valintaa pyritään mallintamaan tämän todellisen käyttäytymisen mukaan ja siinä tarkastellaan loppuvarallisuuden sijaan voittoja ja tappioita. Teorian kehitykseen ovat vaikuttaneet lukuisat Kahnemanin suorittamat empiiriset kokeet, joissa hän on selvittänyt ihmisen käyttäytymistä epävarmoissa valintatilanteissa.

Kahnemanin ja Tverskyn tutkimusten pääsanoma on, että sijoittajan kokema haitta tappiosta on suurempi kuin tämän saama hyöty saman suuruudesta voitosta. Sijoittaja on valmis ottamaan riskiä

¹⁴ Kerrointa kutsutaan myös Arrow-Pratt riskiaversiivisuus indeksiksi. Kun λ on pieni, eli riskiaversiivisuus alhainen, johtaa se korkeamman riskin portfolioihin (ja *vice versa*).

¹⁵ Yleisesti *keskusmomentti* määritellään

$$E[(Y - \mu)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r p(x),$$

eli satunnaismuuttujan poikkeamien potensseina odotusarvosta. Kun r kasvaa, niin poikkeavien havaintojen vaikutus kasvaa eksponentiaalisesti.

tappioista, mutta valitsee mieluummin varman voiton. Hän myös suurentele pieniä todennäköisyyksiä ja vähättelee suuria. Muun muassa nämä huomiot johtavat epätavanomaiseen hyötyfunktion muotoon, verrattuna odotetun hyödyn teoriaan. Riskihakuisuus voittojen tavoittelussa selittääkin, miksi ihmiset lottoavat, mitä odotetun hyödyn teoria ei pysty selittämään, koska odotusarvo pelistä on negatiivinen. Lottoamalla sijoittaja ei käyttäydy rationaalisesti, koska hän voisi yhtä hyvin olla osallistumatta peliin.

Prospektiteorian arvofunktion¹⁶ optimointiongelma portfolioallokaation valinnassa on ei-lineaarinen ja ei-konkaavi, joten sen ratkaiseminen ei ole aivan yksinkertaista eikä siihen perehdytä enää tässä lopputyössä¹⁷. Samoin – toisin kuin keskiarvo-varianssiteoriassa – tulosten optimiallokaatiot ovat hyvin epästabiileja ajassa ja pienetkin painoerot saattavat johtaa aivan eri tuloksiin verrattuna optimiratkaisuun (Best & Grauer 2016).

Portfolio-optimointi hyödyn maksimoinnin ja varsinkin prospektiteorian näkökulmasta on itsessään niin laaja aihe, ettei sitä tässä työssä pystytä käsittelemään perusteellisesti, mutta kuten nähdään Tobinin separaatioteoreeman perusteella, ei sijoittajan preferenssejä tarvitse ennalta määritellä.

5.1 Markowitzin portfolio-optimointi

Markowitzin portfolio-optimointiongelma voidaan ratkaista kolmella eri tavalla, jotka kaikki antavat saman tuloksen. Joko (1) laskemalla minimivarianssiportfolio annetulla tuotto-odotuksella, (2) maksimoimalla portfolion tuoton odotusarvo minimoimalla riski tai (3) sijoittajan riskiaversiivisuuden kautta, jossa ensin määritellään sijoittajan indifferenssikäyrät, jotka määrittävät optimiportfolion. Menetelmät (1) ja (2) ovat vain toistensa vastakohdat, joten niistä esitellään vain ensimmäinen. Menetelmää (3) pohjustettiin jo kappaleen johdannossa, eikä sillä ole yksinkertaista käytännön sovellutusta, koska sijoittajan hyötyfunktio jää usein hyvin abstraktiksi käsitteeksi. Sen vuoksi siihen ei palata enää.

Matemaattisesti menetelmä (1) esitetään varianssin minimointilausekkeena

$$\min_w w^T \Sigma w, \quad (29)$$

ehdolla, että

¹⁶ Prospektiteoriassa käytetään arvofunktion käsitettä, jolla pyritään kuvaamaan tappioita ja voittoja ja vältetään hyötyfunktion käyttöä, joka kuvaa lopputulemasta saatavaa hyötyä.

¹⁷ Aiheesta löytyy kuitenkin kattava artikkeli Pirvulta ja Schultzelta (2012): *Multi-stock portfolio optimization under prospect theory*.

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{w}^T \mathbf{I} &= 1, \quad \mathbf{I} = [1, 1, \dots, 1],\end{aligned}$$

jossa $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ on jo aiemmin esitetty portfolion varianssi matriisimuodossa. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että ensin valitaan jokin tuoton odotusarvo μ_0 , jonka jälkeen minimoidaan varianssi tällä tuottotasolla. Ehdolla $\mathbf{w}^T \mathbf{I} = 1$ tarkoitetaan vain sitä, että kaikki varat sijoitettu, jolloin painot summautuvat ykköseksi. Se voidaan ilmaista myös summana kuten aiemmin.

Markowitzin portfoliomallilla on uniikki ratkaisu, joka on annettu

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} + h\mu_0, \tag{30}$$

jossa

$$\mathbf{g} = \frac{1}{ac - b^2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [c\mathbf{I} - b\boldsymbol{\mu}]$$

ja

$$h = \frac{1}{ac - b^2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [a\boldsymbol{\mu} - b\mathbf{I}],$$

jossa

$$\begin{aligned}a &= \mathbf{I}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{I} \\ b &= \mathbf{I}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ c &= \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}.\end{aligned}$$

Yllä esitetty menetelmä ja ratkaistava ongelma ovat kvadraattisia, joten se ei ole ratkaistavissa lineaarisella optimoinnilla vaan esimerkiksi Lagrangen menetelmällä. Epälineaarisuus tuo mukanaan luonnollisesti myös hitaamman optimoinnin, vaikka nykyään se ei ole ongelma tämän tason ongelmissa. Jo Sharpe (1971) toi kuitenkin esille menetelmän, jolla Markowitzin optimi-portfolion approksimaatio voidaan ratkaista lineaarisesti. Yleisesti, jotta hajauttamisesta olisi hyötyä portfoliovalinnassa, on riskimittarin $\rho(\mathbf{w})$, esimerkiksi varianssin, oltava konvekssi funktio päätösvektorista \mathbf{w} . Tämä ei kuitenkaan poista mahdollisuutta laskea riskimittaria lineaarisesti, kun satunnaismuuttuja on diskreetti, kuten se useimmiten on. (Mansini et al. 2014, 2-4.)

Markowitzin teoria olettaa, että kaikki varat sijoitetaan korkean riskin asetteihin. Kuitenkin käytännössä sijoittajalla on mahdollisuus valita, kuinka varansa allokoit riskittömään koron r_f ja riskillisen

assetin välillä¹⁸. Tobin (1958) toikin Markowitzin teoriaan mukaan riskittömän assetin käsitteen. Sharpe (1964) vei Tobinin tutkimusta pidemmälle, minkä seurauksena syntyi pääomamarkkinasuora (Capital market line, CML). Sen avulla malliin tuodaan mukaan riskitön korko, minkä seurauksena sijoittajalle avautuu mahdollisuus päästä korkeammille hyötykäyrille kuin tavallisessa Markowitzin teoriassa olisi mahdollista, jos hänen optimaalinen portfolionsa eroaa niin sanotusta markkinaportfoliosta. Tämä onnistuu allokoimalla osa varallisuudesta riskittömiin korkopapereihin ja loppuosa riskiasseteihin. Oletuksiin kuuluu myös, että sijoittaja voi ottaa lainaa riskittömällä korolla ja sijoittaa tämän riskillisiin arvopapereihin.

Matemaattisesti pääomamarkkinasuoran lisäys tapahtuu seuraavasti. Nyt portfolion odotettu tuotto ja varianssi muodostuvat riskittömän koron r_f lisäyksen jälkeen niin, että osa w^T sijoitetaan riskilliseen asseettiin ja osa $1 - w^T$ riskittömään korkoon

$$\mu = w^T \mu + (1 - w^T I) r_f \quad (31)$$

ja

$$\sigma^2 = w^T \Sigma w.$$

Varianssi pysyy muuttumattomana, koska riskittömälle korolle se oletetaan nolaksi samoin kuin sen kovarianssi muiden assettien välillä. Nyt keskiarvo-varianssi-optimaalinen portfolio saadaan samalla tavalla kuin aikaisemmin

$$\min_w \sigma_p^2 = w^T \Sigma w, \quad (32)$$

ehdolla, että

$$E[r_p] = w^T \mu + (1 - w^T I) r_f = \mu_0,$$

joka voidaan esittää tietysti myös duaaliongelmana kuten aikaisemmin, maksimoimalla tuoton odotusarvo

$$\max_w E[r_p] = w^T \mu + (1 - w^T I) r_f, \quad I = [1, 1, \dots, 1] \quad (33)$$

rajoitteena

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

¹⁸ Tämä ei todellisuudessa ole totta. Sijoittaja ei käytännössä koskaan pysty ottamaan ja antamaan lainaa samalla korolla. Voi jopa olla, ettei sijoittajalle myönnetä laina ollenkaan, jolloin hän pystyy vain antamaan lainaa. Lainauksen rajoitteisiin voi tutustua lisää Fischer Blackin artikkelista *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing* (1972).

Ongelman ratkaisu on nyt yksinkertaisempi kuin aikaisemmin, koska optimointi suoritetaan pääomamarkkinasuoran suhteen, joka on lineaarinen ja määritellään

$$\frac{E[r_p - r_f]}{\sigma_p} + r_f, \quad (34)$$

tai vaihtoehtoisesti matriisinotaatioin

$$\frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}} + r_f, \quad (35)$$

joista poistamalla viimeinen termi saadaan niin kutsuttu Sharpen luku (Sharpe 1966). Sitä voidaan käyttää eräänlaisena riskimittarina jo itsessään. Se on myös pääomamarkkinasuoran kulmakerroin ja kuvastaa siis tehokkaita portfolioita riskittömästä korosta eteenpäin. Maksimoimalla siis portfolion Sharpen luku saadaan tehokas allokaatio riskittömän koron ja muiden assettien välille. Optimiratkaisu voidaan esittää nyt hieman yksinkertaisemmassa muodossa:

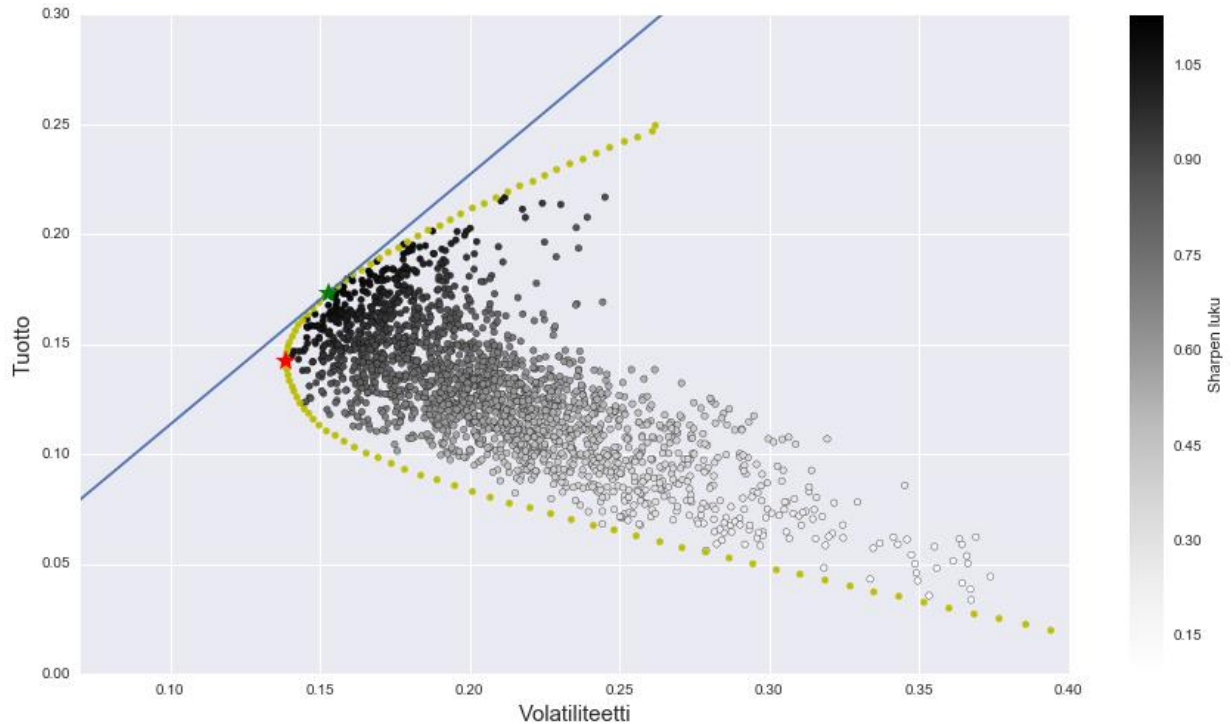
$$w^* = \frac{\mu_0 - r_f}{(\mu - r_f \mathbf{I})^T \Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbf{I})} \times \Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbf{I}), \quad (36)$$

jossa ensimmäinen termi on niin kutsuttu verrannollisuusvakio, jonka suhteen kaikki termin $\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{I})$ elementit skaalataan. Koska riskittömän koron lisäys tuo teoriaan mukaan Sharpen luvun, saadaan optimaalinen portfolioallokaatio tietysti myös maksimoimalla se, eli

$$\max_w \frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}}, \text{ ehdolla, että } w^T \mathbf{I} = 1. \quad (37)$$

Seuraavaan kuvaan (kuva 6) on piirretty havainnollistamaan Microsoftin, Applen, Coca-Colan ja Nokian osakkeita sisältävän portfolion tehokas rintama ja pääomamarkkinasuora. Eri allokaatiot on saatu satunnaisesti simuloimalla portfolion osakkeiden suhteellisia painoja, siten että painot summautuvat aina ykköseksi. Simulointi on suoritettu 2000 kertaa. Optimaalinen portfolioallokaatio, joka maksimoi Sharpen luvun edellä esitetyllä tavalla, on merkitty vihreällä tähdellä. Minimivarianssiportfolio on merkitty kuvaan punaisella tähdellä. Kummatkin ovat tehokkaita allokaatiota riski-

tuotto-mielessä, mutta vain Sharpen luvun avulla voidaan allokaatio optimoida riskittömän koron suhteen.



Kuva 6. Microsoftin, Applen, Coca-Colan ja Nokian osakkeita sisältävä simulointi satunnaisportfolioista. Punaisella tähdellä on merkitty minimivarianssiportfolio ja vihreällä tähdellä maksimaalisen Sharpe-luvun omaava portfolio, kun riskittömäksi korkoksi on valittu nolla.

Vaikka Sharpen luvun maksimoiva portfolio on teoriassa sijoittajalle rationaalisin valinta, on sen käyttö käytännön sovelluksissa kyseenalainen. Jo kauan on tiedetty, että keskituottoja on vaikeampi estimoida kuin tuottojen välisiä kovariansseja, minkä seurauksena estimoinnin virhetermit tuotto-odotuksen kohdalla jäävät usein suuriksi (Merton 1980). Tämä vie perusteita odotetun tuoton käytöltä portfolio-optimoinnissa.

Muun muassa näistä syistä on pyritty etsimään muita tapoja portfolio-optimointiin, jotka eivät ole niin riippuvaisia tuoton odotusarvosta ja täten estimointivirheistä. Esimerkiksi minimivarianssiperiaatteella optimoidut portfoliot ovat tulleet takaisin akateemiseen tarkasteluun. Samoin on pyritty löytämään täysin uusia menetelmiä riskin mittaamiseen ja sitä kautta portfolioallokaatioihin. Yksi näistä on seuraavassa osassa esitetty Conditional Value at Risk -minimoitu portfolio, joka minimivarianssiportfolion tapaan ei ota kantaa tuoton odotusarvoon ja on siksi ainakin siltä osin vankemmalla pohjalla.

5.2 CVaR-mittarin minimointi

Kappaleessa 3.4 esiteltiin Conditional Value at Risk -mittari hyvin teoreettisesti. Samalla todettiin, että CVaR ja Expected Shortfall ovat käytännössä sama mittari. Seuraavassa käydään läpi CVaR-minimointi portfoliolle. Esitys pohjautuu edelleen Uryasevin ja Rockafellarin (2000; 2002) analyysiin.

Aloitetaan aiemmin esitetyllä CVaR:n määritelmällä, joka on siis ehdollinen odotusarvo VaR-rajan ylittävistä tappioista

$$\Phi_{\beta}(x) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(x,y) \geq a_{\beta}(x)} f(x,y) p(y) dy.$$

Yllä olevaa yhtälöä on vaikea käyttää sellaisenaan sen sisältämän VaR-rajan ($a_{\beta}(x)$) vuoksi. Siksi siitä on johdettu toinen muoto, joka voidaan ratkaista simuloimalla jakaumasta $p(y)$ satunnaisotantoja. Yllä olevaa yhtälöä ei tarvitse käyttää ollenkaan, vaan CVaR voidaan johtaa yhtälöstä

$$F_{\beta}(x, a) = a + (1 - \beta)^{-1} \int_{f(x,y) > a} (f(x,y) - a) p(y) dy, \quad (38)$$

josta voidaan osoittaa, että se on konvekssi a :n suhteen ja jatkuvasti derivoituva, ja näin myös suhteellisen helposti laskettavissa. CVaR on tämän funktion minimi a :n suhteen, eli

$$\Phi_{\beta}(x) = F_{\beta}(x, a(x, \beta)) = \min_a F_{\beta}(x, a), \quad (39)$$

joka saadaan derivoimalla $F_{\beta}(x, a)$ a :n suhteen, eli

$$\frac{\partial F_{\beta}(x, a)}{\partial a} = 1 + (1 - \beta)^{-1}(\Psi(x, a) - 1),$$

ja asettamalla tulos nolllaksi

$$1 + (1 - \beta)^{-1}(\Psi(x, a) - 1) = 0,$$

$$\Psi(x, a) = \beta.$$

Tästä voidaan päätellä, että VaR-funktio $a(x, \beta)$ minimoi funktion $F_\beta(x, a)$ a :n suhteen. Koska $\text{VaR}(a(x, \beta))$ ei välttämättä ole jatkuva funktio, kuten määritelmässä (11) todettiin, niin a :n arvoja sisältävä intervalli $A_a(x)$, joka minimoi $F_\beta(x, a)$ funktion, on siten

$$A_\beta(x) = \arg \min_a F_\beta(x, a). \quad (40)$$

Tästä β -VaR on määritelmällisesti

$$a_\beta(x) = \text{äärivasemmalla sijaitseva piste joukossa } A_a,$$

eli

$$a_\beta(x) \in \arg \min_a F_\beta(x, a) \quad (41)$$

ja β -CVaR jo aiemmin annetun tapaan on

$$F_\beta(x, a_\beta(x)).$$

Uryasevin (2000) mukaan, jos $f(x, y)$ on konvekssi funktio painojen x suhteen, on myös funktion $F_\beta(x, a)$ oltava konvekssi x :n suhteen. Joten, kun CVaR halutaan minimoida, voidaan käyttää optimaalisten painojen etsimiseen funktiota $F_\beta(x, a)$. Ja kuten edellisessä kappaleessa todettiin, on joukko X konvekssi painojen suhteen.

Kuten aiemmin mainittu, $F_\beta(x, a)$ voidaan approksimoida diskreetissä muodossa simuloimalla jakaumasta $p(y)$ satunnaisotantana skenaarioita y_1, y_2, \dots, y_J ja laskemalla estimaatti

$$\tilde{F}_\beta(x, a) = a + (1 - \beta)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j [f(x, y_j) - a]^+, \quad (42)$$

jossa $t^+ = \max\{t, 0\}$, tarkoittaen sitä, että vain tappiot, jotka ylittävät rajan a huomioidaan ja jossa π_j on skenaarion todennäköisyys. Todennäköisyys π_j oletetaan usein yksinkertaisesti olevan J^{-1} ,

mutta yhtä hyvin voidaan käyttää menetelmiä ristiin ja ottaa huomioon havainnon ajankohta esimerkiksi aikaisemmin mainitun EWMA-painotuksen avulla. Simuloidut tuotot valitaan siis J päivältä peräkkäisiä havaintoja. Tällä varmistetaan, että aineiston havaintojen sisältämät ehdolliset – kuten ARMA- ja GARCH-mallien mukaiset – riippuvuudet eivät katoa, ja oletus siitä, ettei jakaumasta tarvitse tehdä oletuksia, pysyy voimassa.

CVaR voidaan ratkaista myös lineaarisen optimoinnin keinoin (Rockafellar & Uryasev 2000). Tällöin joudutaan määrittämään kaavan (42) tilalle lineaarinen apuyhtälö, joka on annettu

$$a + \frac{1}{q(1 - \beta)} \sum_{k=1}^q u_k, \quad (43)$$

rajoitteilla

$$\mu(x) \leq -R, \quad x^T \mathbf{I} = 1, \quad u_k \geq 0, \quad x^T y_k + a + u_k \geq 0, \quad \text{kun } k = 1, \dots, r,$$

jossa R on jokin tuottotaso. Rajoitteista huomataan, että, jos CVaR halutaan minimoida lineaarisen optimoinnin keinoin, joudutaan ensin määrittämään tuottotaso R , jonka suhteen minimointi toteutetaan.

Bertsimas et al. (2004) esittävät, että ylläolevat esitykset voidaan muuttaa minimoinnin kannalta intuitiivisempaan parametrittomaan muotoon:

$$\min_x x^T \bar{r} - \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K r_j(x), \quad (44)$$

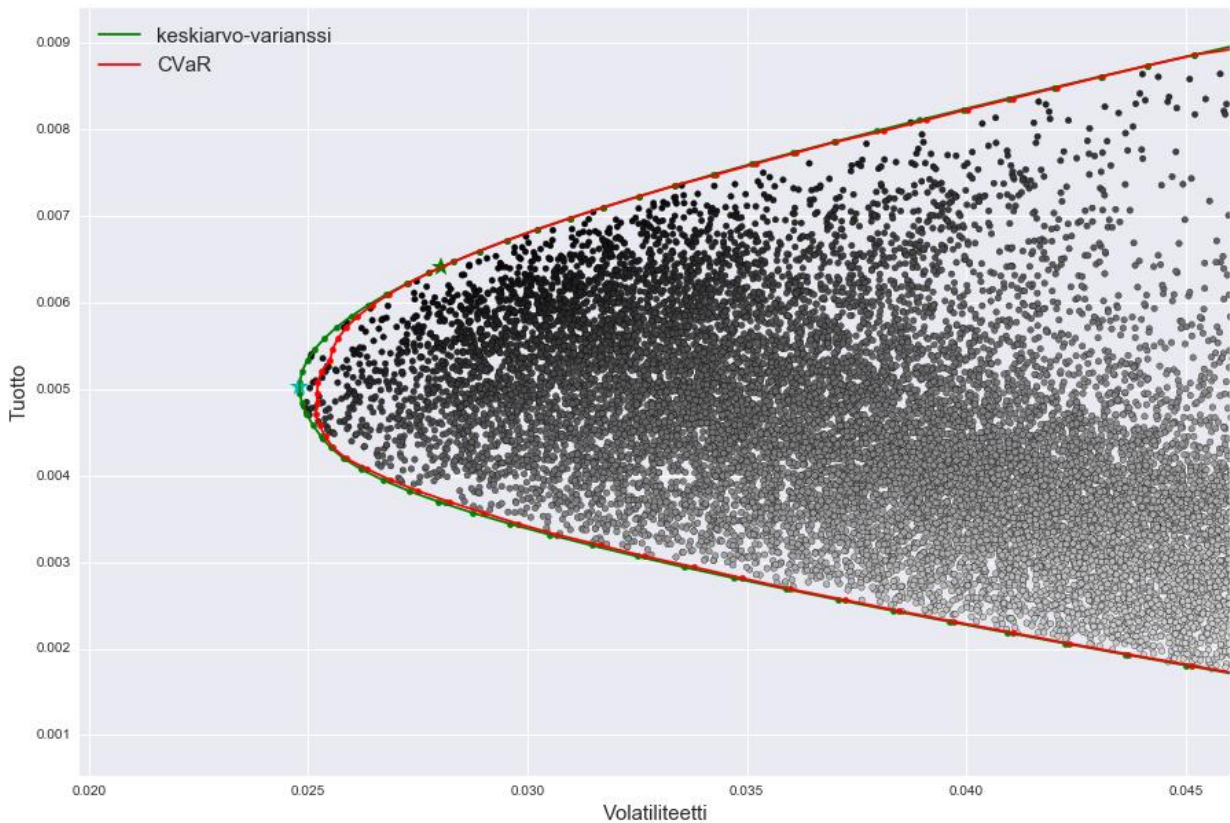
ehdolla, että

$$x^T \bar{r} = r_p, \quad x^T \mathbf{I} = 1,$$

jossa $x^T \bar{r}$ on keskituotto ja $K = (1 - \beta)T$ otoksesta T , siten että tuotot on asetettu r_1, \dots, r_T ja $r_t < r_{t+1}$. Kaava on jo aiemmin (kaava (16)) esitetty ES-mittari. Optimointiongelma on käytännössä identtinen keskiarvo–varianssi-optimoinnin kanssa, nyt vain minimoidaan CVaR tai ES tuotto-odotuksen suhteen.

Seuraavaan kuvaan (kuva 7) on piirretty samoja osakkeita sisältäviä satunnaisportfolioita kuin kapaleessa 5.1 esitettyyn kuvaan. Nyt kuvaan on kuitenkin lisätty myös optimaalinen CVaR-rintama punaisella. Kuten havaitaan, optimaaliset portfoliot kulkevat hyvin lähellä toisiaan ja kuten teoria olettaa, CVaR-rintama on aina Markowitzin tehokkaan rintaman sisäpuolella, koska jälkimmäinen

on tuotto–varianssi-rintamalla optimaalinen eli jokaisella tuottotasolla varianssi on minimoitu. Varianssin optimoinnin näkökulmasta CVaR-rintama onkin tehoton. Joskin, kuten aikaisemmin todettu, on varianssi riskin mittarina jo itsessään kyseenalainen.



Kuva 7. Microsoftin, Applen, Coca-Colan ja Nokian osakkeita sisältävä simulointi satunnaisportfolioista. Vihreällä tähdellä on merkitty minimivarianssiportfolio ja syaanilla tähdellä maksimaalisen Sharpen luvun portfolio, kun riskittömäksi koroksi on valittu nolla.

Yllä olevassa kuvassa peräkkäisten päivien määräksi J on valittu 10 ja simulointeja on suoritettu 10 000 kappaletta optimaalisen CVaR-portfolioon laskemiseksi. Portfolioita on simuloitu 20 000 kappaletta, joista osa tosin leikkautuu kuvan ulkopuolelle. Syaani tähti ilmaisee minimivarianssiportfolioa ja vihreä tähti optimiportfolioa, joka maksimoi Sharpen luvun riskittömän koron ollessa nolla.

Kuvasta nähdään myös, että CVaR-optimaalinen rintama ei ole välttämättä vahvasti konvekssi tuotto/volatiliteetti-koordinaatistossa, josta seuraa, että osa optimaalisista pisteistä on CVaR-rintaman ulkopuolella. Toisaalta optimirintamat ovat käytännössä identtiset pienillä assettien määrillä, kun tuotto-odotus nousee yli maksimaalisen Sharpen luvun omaavan portfolioon. Mutta kuten myöhemmin nähdään, tämä ei pidä paikkaansa, kun assettien määrä portfoliossa kasvaa.

Vaikka CVaR-funktion konveksisuus takaa löydettävissä olevan uniikin globaalin minimin, sille ei kuitenkaan ole olemassa analyyttistä ratkaisua (Acerbi, C. & Simonetti 2002). Tämä johtuu siitä, että optimointiprosessi sisältää aina portfolion skenaarioiden järjestämisen pienimmästä suurimpaan. Tästä seuraa, että pienet muutoksen parametreissa, jotka ovat jatkuvia, johtaa diskreetteihin muutoksiin portfolion järjestyksessä. Globaali minimi voidaan kuitenkin laskea numeerisin keinoin, kuten tässä työssä tehdään.

6 Empiirinen osio

Työn empiirisessä osiossa tarkastellaan, kuinka CVaR-minimoitu portfolio käyttäytyy verrattuna tavanomaisimpiin optimiportfolioihin. Vertailtavina portfolioina käytetään minimivarianssin ja maksimi-Sharpen luvun omaavia portfolioita. Vertailu tehdään kahdella aikajaksolla, alkaen ennen finanssikriisiä ja alkaen sen jälkeen. Samoin vertaillaan kahta eri tapaa käyttää aiempien hetkien informaatiota. Menetelmien ja aineiston tarkempi kuvaus on annettu seuraavissa kappaleissa.

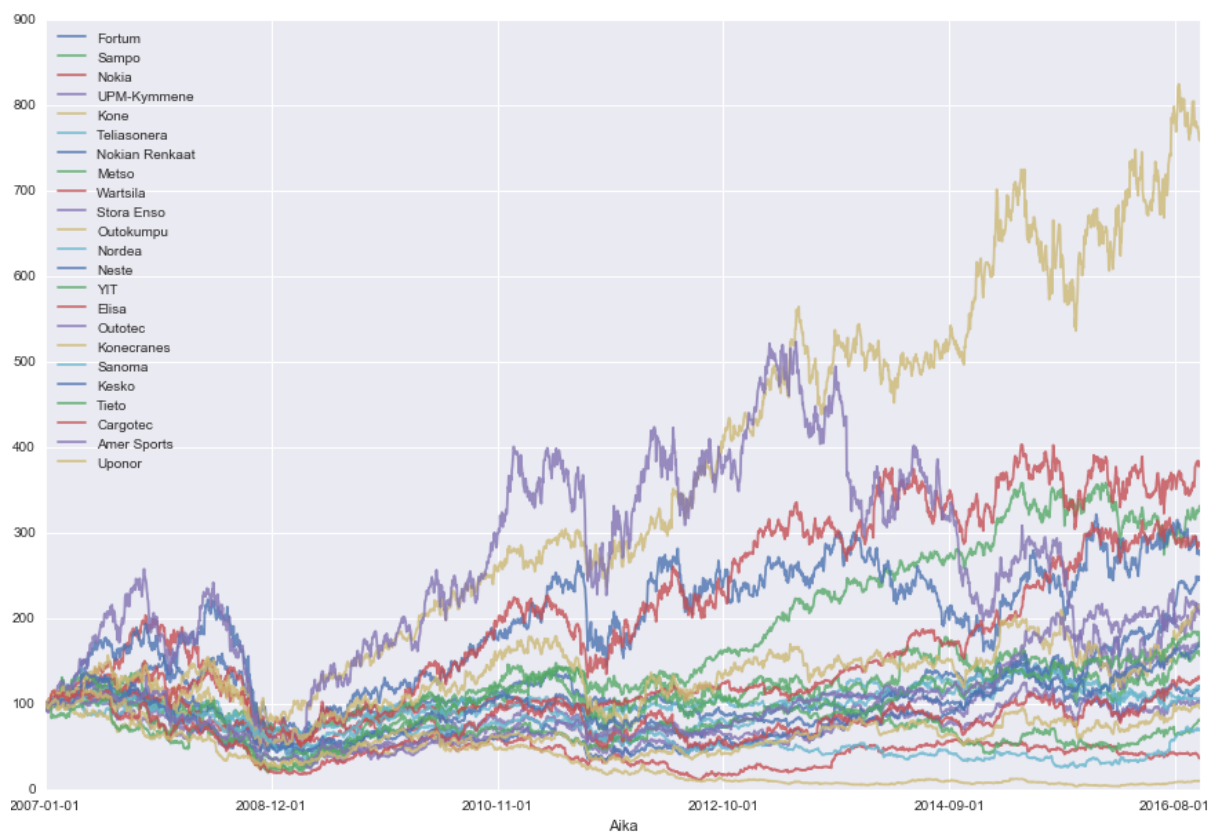
6.1 Käytetty aineisto

Empiirinen tutkimus olisi mielekästä tehdä jonkin rahoituslaitoksen todellisella sijoitusportfolion sisällöllä, mutta tällaisen aineiston saanti on lähes mahdotonta. Lisäksi osalle aseteista ei ole markkinahintaa olemassa ja osa on erittäin epälikvidejä. Näiden ongelmien vuoksi on päädytty esittämään aiemmin esitetyt teoriat suomalaisten osakeyhtiöiden osakkeilla.

Aineistona käytetään vuonna 2008 Helsingin pörssin OMXH25-indeksin sisältämien osakkeiden aikasarjoja alkaen 1.1.2007 ja päättyen 17.10.2016. Aineisto on *Yahoo! Finance* -sivustolta ja siinä otetaan huomioon osakkeiden jakautumiset ja irronneet osingot. Indeksinkin alkuperäistä sisältöä on muokattu siten, että siitä on poistettu Pohjola Pankki ja Rautaruukki, joista edellinen poistui pörssistä OP-Pohjolan ostettua sen vuonna 2014 ja jälkimmäinen liitettiin osaksi SSAB-yhtiötä samaten vuonna 2014.

Empiirisen osiossa ei oteta kantaa (1) transaktiokustannuksiin, (2) niin sanottuun selviytymis-/valikoitumisharhaan¹⁹ eikä (3) veroseuraamuksiin. Sen tarkoitus ei ole olla tyhjentävä analyysi menetelmien käytöstä sijoitusstrategiana, vaan tarkoituksena on vertailla CVaR-minimoidun ja muin kriteerein optimoitujen portfolioiden antamia tuloksia. Tämän vuoksi kahden yhtiön poisjätöllä oletetaan olevan suhteellisen pieni vaikutus lopputulokseen. Samoin kumpikaan poisjätetyistä yhtiöistä ei poistunut pörssistä epäonnisten sattumien vuoksi, vaan ne ostettiin, minkä vuoksi selviytymisharhan suunta ei ole selvä. Transaktiokustannusten poisjätto saattaa taas vaikuttaa tuloksiin huomattavasti, mutta toisaalta institutionaalisilla sijoittajilla ne ovat jokseenkin pienet, eikä työtä ole haluttu rajata koskemaan vain tiettyä joukkoa, vaan sen on tarkoitus olla laajempi kuvaus. Myöskään veroseuraamuksiin ei ole haluttu ottaa kantaa, koska ne kohdistuvat eri ryhmille usein eri tavalla.

Seuraavaan kuvaan (kuva 8) on piirretty kaikki tarkastelussa olevat logaritmoidut aikasarjat skaalatuna lähtötasoon 100.



Kuva 8. Käytettävät aikasarjat indeksoituna lähtötasoon 100.

¹⁹ Selviytymisharhalla tarkoitetaan taloustieteessä analyysin vääristymää suorituskky tutkimuksissa. Jos epäonnisia, pörssistä poistuneita yhtiöitä ei huomioida analyysissä ja vain ajan yli selvinneet yhtiöt huomioidaan, niin tuloksiin syntyy vinouma ylöspäin, koska vain hyvät yhtiöt on valikoitunut otokseen.

Kuten kuvasta nähdään, on kymmenessä vuodessa paljon laskuja ja nousuja. Samoin eri osakkeiden väliset erot ovat suuria, eikä niiden korrelaatioita ja aikasarjojen jakaumien ominaisuuksia kuvasta pysty arvioimaan silmämääräisesti. Siksi liitteissä annetuilla kuvilla on pyritty esittämään jakaumien vinoudet, huipukkuudet ja korrelaatiot toistensa suhteen. Annetuista kuvista voidaan päätellä, että aineistossa esiintyy voimakkaitakin korrelaatioita, kuten esimerkiksi UPM-Kymmenen ja Stora Enson välinen korrelaatio, noin 0,85, kun taas alhaisin on Amer Sportsin ja Nokian välinen korrelaatio, jonka kerroin on 0,22. Tämä on luonnollista, koska UPM-Kymmene ja Stora Enso toimivat samalla toimialalla, kun taas Nokia ja Amer Sports toimivat täysin eri toimialalla. Keskimäärin korrelaatio on aineistossa 0,46.

Samoin voidaan todeta, etteivät aikasarjat ole normaalisti jakautuneita, kun niitä verrataan teoreettiseen normaalijakaumaan liitteissä annetuissa kvantiili–kvantiili-kuvaajissa.

6.2 Käytettävistä menetelmistä

Työssä käytetään Uryasevin et al. (2002) työtä mukaillen ns. todellista *out-of-sample*-testaamista. Siinä tarkoituksena on hyödyntää koko aineiston aiempaa informaatiota kullakin hetkellä t . Käytännössä tämä tapahtuu estimoimalla optimaaliset CVaR- ja keskiarvo-varianssiportfolioiden painot hetkellä t_1 aineiston t_0-t_1 avulla ja käyttämällä näitä painoja hetken t_1-t_2 tuottojen laskemiseen. Tämän jälkeen käytetään informaatiota t_0-t_2 , josta saadaan jälleen optimaaliset assettien painot, joiden avulla hetken t_2-t_3 tuotot voidaan laskea. Tätä jatketaan aikasarjan loppuun asti. Näin pystytään hyödyntämään kaikki siihen asti saatavilla oleva informaatio, minkä vuoksi sen voi ajatella vastaavan markkinoilla toimijan todellista informaatiojoukkoa. Ensimmäisen aikavälin t_0-t_1 pituudeksi on valittu yksinkertaisuuden vuoksi yksi kalenterivuosi, jolla varmistetaan riittävä perusaineisto algoritmille, ja sen jälkeisille t_n-t_{n+1} kun $n > 1$, on valittu 20 arkipäivää eli noin yksi kalenterikuukausi.

Tuloksia verrataan myös tavanomaisempaan liikkuvan ikkunan menetelmään, jossa aikaisempaa informaatiota ei hyödynnetä kokonaan, vaan valitaan jokin aikaikkuna Δt , jonka annetaan liikkua ajassa. Tutkielmassa aikaikkunaksi on valittu yksi kalenterivuosi.

Kummassakin edellä esitetyssä menetelmässä on yhden osakkeen paino rajoitettu suljetulle välille $[0, 0,2]$. Tällä pyritään tuomaan realismia mallinnukseen, koska algoritmin etsiessä minimejä, voi hyvin olla, että hetkellisesti yksi osake saa suhteettoman painon ilman rajoitteita. 20 % maksimipaino voi hyvin olla liian korkea todellisuudessa ja sen onkin tarkoitus olla vain suuntaa antava.

Kummatkin menetelmät ajetaan aikasarjoille alkaen ennen finanssikriisiä ja alkaen finanssikriisin jälkeen. Tarkoituksena on korostaa aikasarjan valinnan tärkeyttä ja siihen liittyviä ongelmia, samoin kuin tuoda esille eri menetelmien käyttäytymistä lasku- ja nousumarkkinoissa.

6.3 Optimointimenetelmä

Kuten todettu, jos optimaaliset CVaR-portfolion painot haluttaisiin laskea lineaarisen optimoinnin keinoin, jouduttaisiin ensin määrittämään tuottotaso ja CVaR-minimiä etsiessä jouduttaisiin iteroimaan kohti minimistettä muuttamalla tuottotasoa. Voitaisiin myös käyttää ns. brute force -menetelmää simuloimalla suuria määriä satunnaisia portfolioita ja valitsemalla niiden joukosta pienimmän CVaR:n omaava portfolio. On kuitenkin kehitetty monia juuri epälineaariseen optimointiin soveltuvia algoritmeja, joista tähän työhön on valittu *SLSQP*.

SLSQP (Sequential Least Squares Programming) on alun perin Dieter Kraftin (1988; 1994) FORTRAN 77 -ohjelmointikielelle kehittämä algoritmi, jolla voidaan ratkaista epälineaarisen ohjelmoinnin ongelmia. Se kuuluu *toistettujen kvadraattisten optimointimenetelmien* (SQP) piiriin, joissa tarkoituksena on löytää iteroiva prosessi, joka konvergoituu optimipisteeseen (Boggs & Tolle 2000; 1996). SQP-algoritmeja on useita, ja ne on kehitetty käytännön ongelmien ratkaisemiseen. SLSQP-algoritmi on yleisessä käytössä ja todettu useissa tutkimuksissa hyväksi epälineaaristen optimointiongelmiin ratkaisemiseen (esim. Pourmohamad 2016; Lyu et al. 2014). Yleisessä tilanteessa epälineaarinen ongelma voidaan määritellä seuraavasti:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (45)$$

joka oletetaan epälineaariseksi, yleisten rajoitteiden ollessa

$$\begin{aligned} g_j(x) &= 0, & j &= 1, \dots, m_e, \\ g_j(x) &\geq 0, & j &= m_e + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

ja muuttujan x ylä- ja alarajarajoitteiden ollen

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad ^{20}$$

Tämän työn sovellutuksessa ylläesitetty tarkoittaa sitä, että painoille w annetaan ylärajoitteeksi 0,2 ja alarajaoitteeksi 0 eli lyhyeksi myynti rajataan tarkastelun ulkopuolelle. Yleiseksi rajoitteeksi annetaan

²⁰ Kraft (1994)

$g(w) = \sum_{i=1}^N w_i - 1$, tarkoittaen, että painojen on summauduttava ykköseksi ja täten kaikki varat on sijoitettava. Konvekssi optimointi on itsessään jo oman tutkimuksen laajuinen, eikä tässä työssä pystytä syventymään siihen laajemmin.

Empiirinen osio on kirjoitettu *Python 2.7* -ohjelmointikielellä ja optimaalisten painojen löytämiseen on käytetty *SciPy*-paketin *optimize.minimize()*-funktion *SLSQP*-metodia²¹, joka saatiin testiaineistolla ja siihen kuuluvilla rajoitteilla konvergoitumaan 21 iteroinnilla hyvällä, yhdeksän desimaalin tarkkuudella²². *Scipy*-paketin *SLSQP*-metodi palauttaa paluuarvona sille annetun objektifunktion minimin ja annettujen parametrien optimit, jotka minimoivat objektifunktion, metodille annettujen rajoiteyhtälöiden puitteissa.

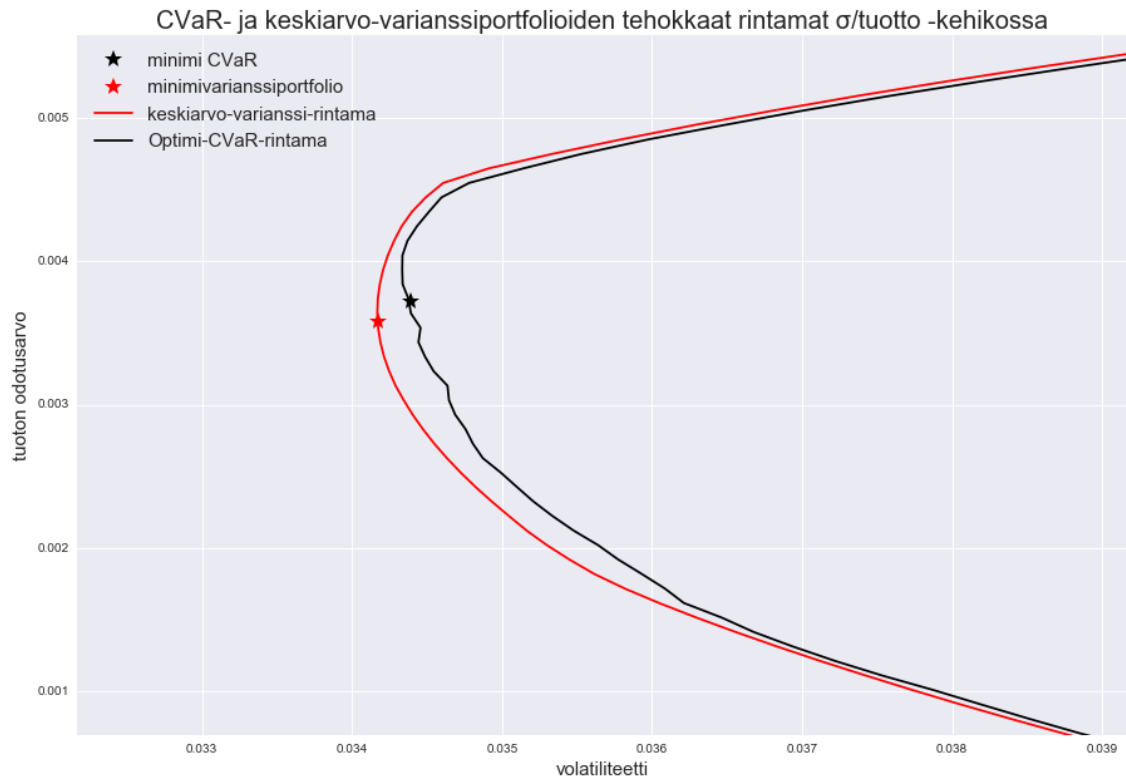
CVaR-minimiportfoliota ei näin ratkaista lineaarisen ohjelmoinnin keinoin, koska se ei anna tulokseksi CVaR(x)-funktion globaalia minimiä, vaan jokaisen CVaR:n kullakin tuotto-odotuksella. Tämä poistaisi vertailtavuuden minimivarianssiportfolion kanssa, jonka vuoksi joudutaan laskemaan globaali minimi muulla tavoin. Kaikki työssä käytetty koodi on tutkielman tekijän kirjoittamaa, kuten CVaR- ja portfolioteorian laskenta-algoritmit sekä taustatestaus-algoritmi, Scipyn *SLSQP*-metodia käyttäen.

6.4 Tulokset

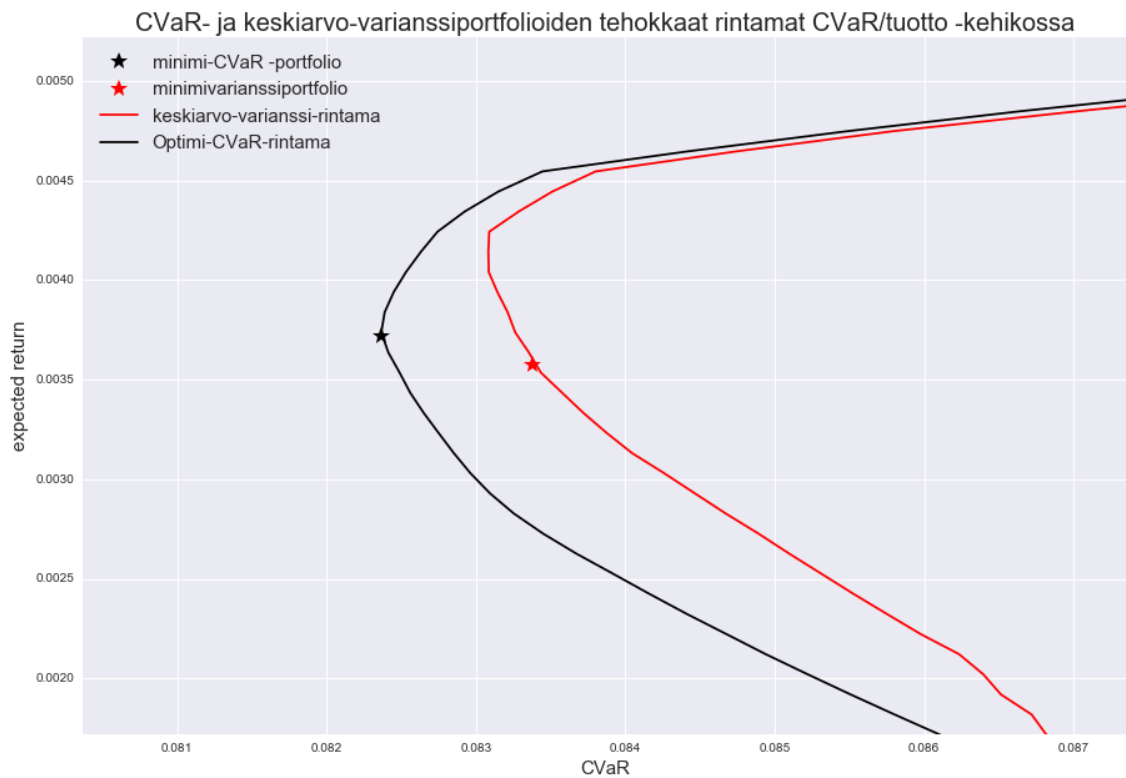
Seuraaviin kuviin (kuvat 9 ja 10) on piirretty minimoidut CVaR- ja keskiarvo-varianssiportfoliot sekä tuotto-volatiliteetti- että tuotto-CVaR-koordinaatistoihin kattaen koko aineiston. Samoin kumpikin minimi on merkitty kuviin tähdillä. CVaR:n luottamustasoksi on valittu 0,95.

²¹ Lisää metodista löytyy funktion lähdekoodin kommentteista: https://github.com/scipy/scipy/blob/v0.18.1/scipy/optimize/_minimize.py#L36-L466

²² Uryasev on julkaissut testiaineistoja ja niiden ratkaisuja rajoitteilla hänen yliopistonsa kotisivuillaan, niihin voi tutustua: <http://www.ise.ufl.edu/uryasev/research/>.



Kuva 9. Koko aineistosta lasketut tehokkaat rintamat tuotto-odotus/ volatiliteetti -koordinaatistossa, $\beta = 0,95$.



Kuva 10. Koko aineistosta lasketut tehokkaat rintamat tuotto-odotus/ CVaR -koordinaatistossa, $\beta = 0,95$.

Kuten kuvista havaitaan, eroavat CVaR- ja keskiarvo-varianssirintama toisistaan huomattavasti. Samoin ne eivät ole toistensa suhteen konvekseja funktioita, eivätkä niiden minimit osu toistensa koordinaatistoissa minimipisteisiinsä. Näin ollen ne eivät myöskään ole toisistaan johdettavissa. Tämä johtuu luonnollisesti tuottojakaumissa esiintyvistä vinoumista, koska kuten sanottu, ovat minimivarianssin ja minimi-CVaR:n tehokkaat rintamat identtiset symmetrisillä elliptisillä jakaumilla. Samoin kuvista nähdään, että minimi-CVaR-portfolioon tuotto-odotus on kummassakin kuvassa korkeammalla kuin minimivarianssiportfolioon.

Seuraavassa tarkastellaan, kuinka CVaR-minimoitu portfolio vertautuu varianssi-minimoituun portfolioon. Alla oleviin kuviin on piirretty minimivolatiliteetti- ja minimi-CVaR-portfolioiden tuotot alkaen ennen finanssikriisiä. Kuten voidaan havaita, jos tarkastelussa käytetään koko historiallista aineistoa liikkuvat optimiportfoliot hyvin lähellä toisiaan. Vuosien 2008 ja 2010 välillä olevasta laskumarkkinasta CVaR-optimiportfoliot näyttäisivät selvinneen suhteellisen hyvin samoin kuin myöhemmästä nousumarkkinastakin.

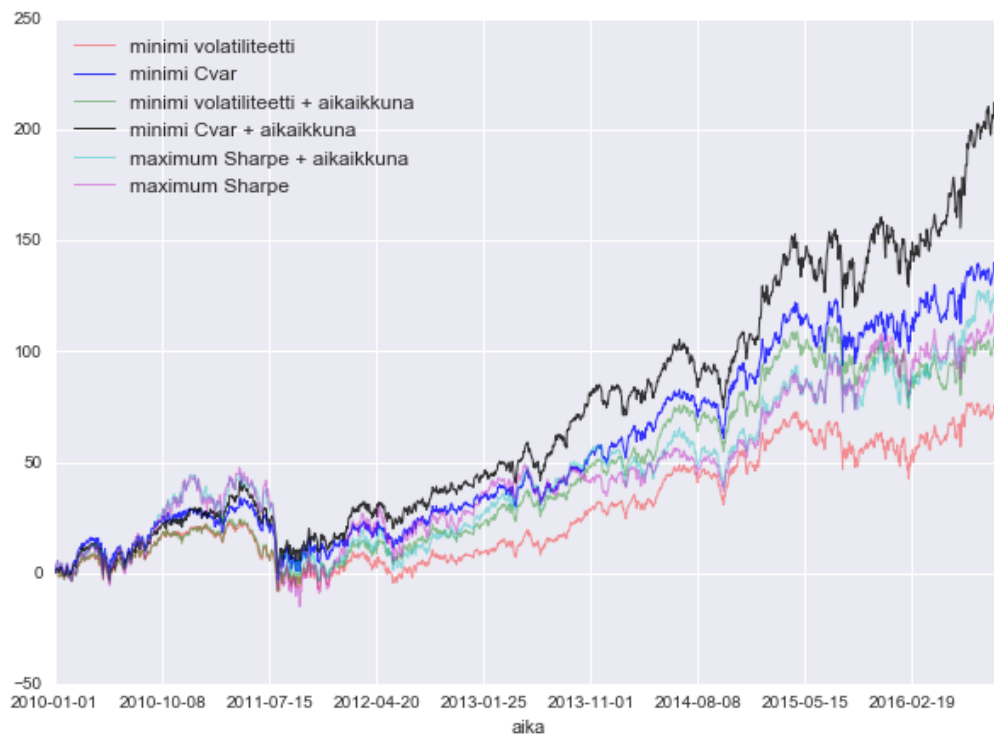
Käyttämällä liikkuvaa aikaikkunaa näyttäisi CVaR-minimoitu portfolio tuottavan pidemmällä aikavälillä paremmin. Tämä voitaisiin selittää sillä, että finanssikriisin aikana aikasarjoihin muodostui huomattavia häntiä negatiiviseen suuntaan, minkä vuoksi CVaR-minimoitu portfolio hylkii näitä osakkeita.



Kuva 11. Lasketut portfoliot aineistolla alkaen ennen finanssikriisiä, $CVaR: n \beta = 0,95$.

Tämän vuoksi tarkasteluun otettiin mukaan myös finanssikriisin jälkeinen aika käsittäen suurelta osin nykyisen nousumarkkinan. Hypoteesina on, että CVaR-optimoitu portfolio tuottaa paremmin nousukautena, kun aikasarjoista puuttuu iso osa epätavanomaisia finanssikriisin aiheuttaneita suuria laskuja.

Seuraavaan kuvaan onkin piirretty vain nousumarkkina vuoden 2010 alusta alkaen ja näin sisältäen informaatiota aina vuoden 2009 alusta alkaen. Nyt huomataankin, että CVaR-optimoidut portfoliot ovat ylivoimaisia tuoton suhteen verrattuna muilla tavoin optimoituihin portfolioihin. Tämä selittyy jo aiemmin mainitulla ajatuksella finanssikriisin yhteydessä syntyneiden pitkien häntien poisjäännillä aineistosta, jolloin optimointialgoritmi ei hylji näitä osakkeita.



Kuva 12. Lasketut portfoliot aineistolla alkaen finanssikriisin jälkeen, $CVaR: n \beta = 0,95$.

Tarkasteluun tuotiin myös CVaR-portfoliot 0,99 %:n luottamustasolla. Saadut tulokset on piirretty seuraaviin kuviin. Kuten havaitaan, nousumarkkinan osalta tulokset eivät juuri muutu, mutta ottamalla aineiston alun laskumarkkina mukaan tarkasteluun havaitaan, että sen vaikutus korostuu laskettaessa CVaR:ia. Toisaalta yhden vuoden aikaikkunassa on havaintoja käytettävissä 99 % luottamustasolla vain noin 2,5 havaintoa, joten sen käytettävyys voidaan helposti kyseenalaistaa.



Kuva 13. Lasketut portfoliot aineistolla alkaen ennen finanssikriisiä, $CVaR: n \beta = 0,99$



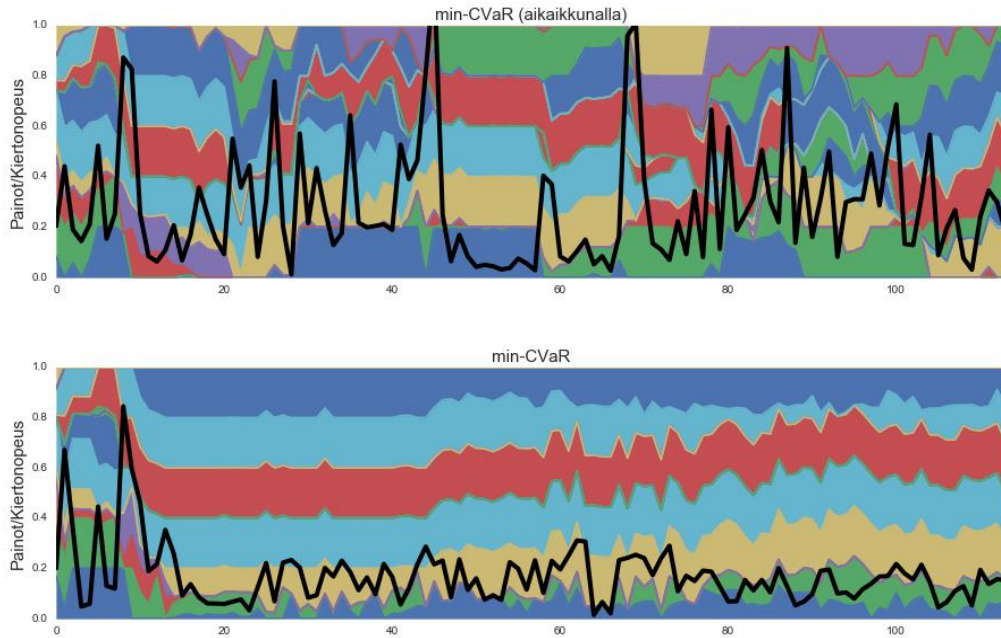
Kuva 14. Lasketut portfoliot aineistolla alkaen finanssikriisin jälkeen, $CVaR: n \beta = 0,99$

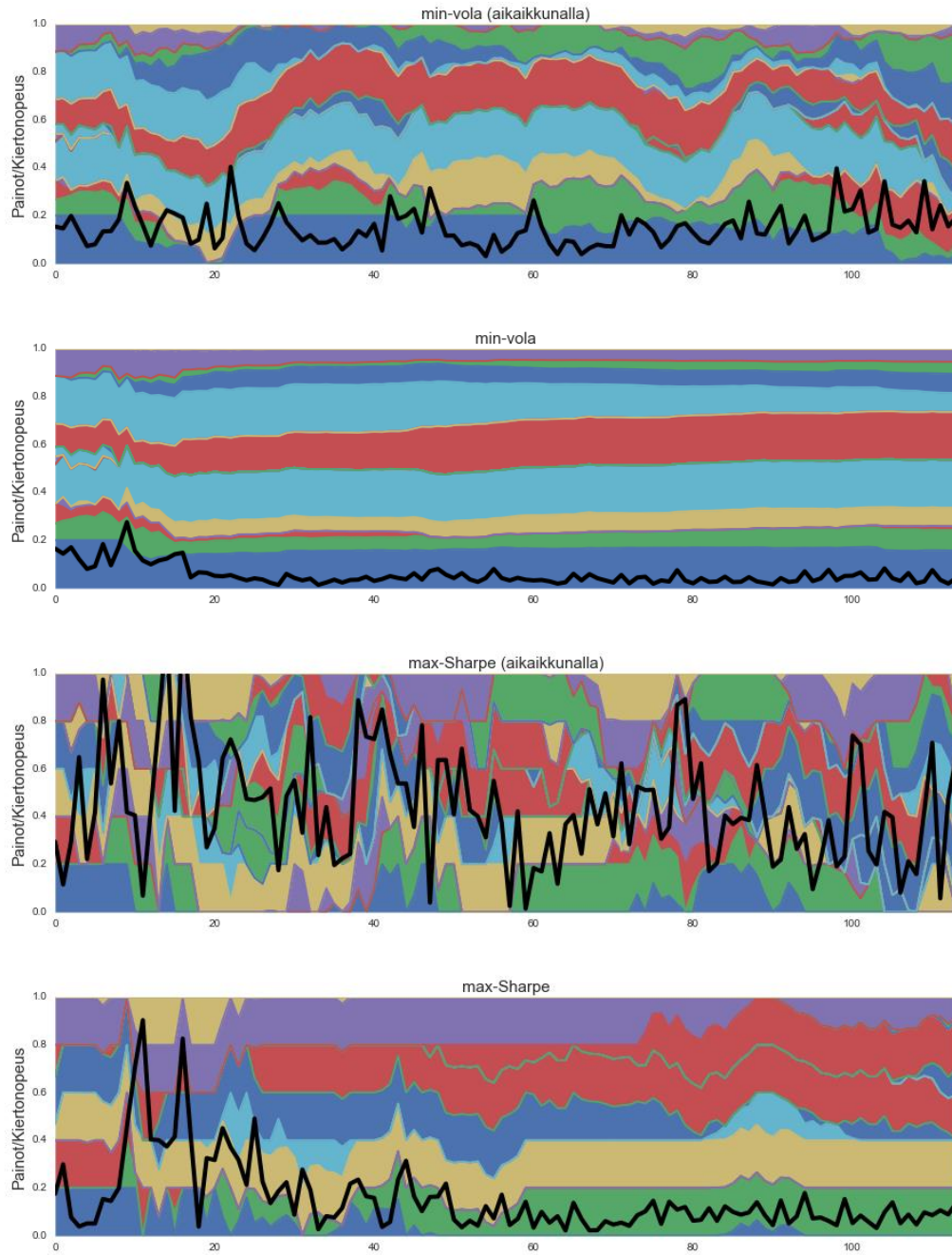
Seuraavassa tarkastellaan eri portfolioiden stabiilisuutta. Stabiilisuustarkastelu on tärkeää, varsinkin jos transaktiokustannukset tuotaisiin mukaan analyysin. Jos tuloksissa ilmenee paljon vaihtelua portfolioissa ajan suhteen, menettää strategia mielekkyyttä kustannusten nousun vuoksi.

Seuraaviin kuviin (kuva 15) on piirretty minimi-CVaR, minimivolatiliteetti- ja maksimi-Sharpen luvun portfolioiden painot liikkuvalla ikkunalla ja ilman. Kuviissa x -akselilla on aika ja jokainen ajan piste esittää aikaisemmin esitettyä 20 päivän välein tehtävää uudelleenallokointia. y -akselilla on painot, jotka summautuvat luonnollisesti ykköseksi jokaisella ajan hetkellä. Eri värit kuvaavat eri osakkeita. Kuviin on myös lisätty portfolioin kiertonopeus mustalla viivalla, joka on annettu

$$kiertonopeus = \frac{1}{T - M} \sum_{t=1}^{T-M} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|), \quad (46)$$

jossa T on aikasarjan pituus, M estimointi-ikkuna, $w_{j,t+1}$ on assetin j paino ajassa $t + 1$ ja $w_{j,t}$ on portfolioin painot ennen uudelleen painotusta ajassa $t + 1$. Tällä tarkoitetaan sitä, että kun assettien suhteelliset hinnat muuttuvat estimointi-ikkunan M aikana, niin se tulee ottaa huomioon.





Kuva 15. Kuvissa eri menetelmin optimoitujen portfolioiden stabiilisuus. Eri väreit kuvaavat eri osakkeiden painoja kussakin portfolioissa. Lisäksi kuvaan on piirretty mustalla portfolion kiertonopeus.

Kuten havaitaan, liikkuvan ikkunan menetelmää käytettäessä kasvaa portfolion kiertonopeus huomattavasti riippumatta valitusta menetelmästä. Kun tuloksia verrataan aiemmin esitettyihin suhteellisen saman tyyppisiin tuottoihin eri strategioiden välillä, voidaan sanoa, ettei transaktiokustannukset huomioimalla voida suuremmalla portfolion kiertonopeudella ainakaan saada huomattavia ylituottoja. Samoin havaitaan, että CVaR-minimoitu portfolio ilman aikaikkunaa on suhteellisen stabiili,

eikä merkittäviä uudelleenpainotuksia ajassa ilmene. Minimivarianssiportfolio vaikuttaisi olevan strategioista ylivoimaisesti stabiilein sekä aikaikkunalla että ilman. Tämä toisaalta viittaa siihen, että algoritmi valikoi vain alhaisen varianssin – jakauman kummastakin päästä katsoen – omaavia asetteja portfolioon, jonka johdosta valikoituneiden yritysten joukko saattaa olla jokseenkin homogeeninen. CVaR-minimoitu portfolio huomioi vain jakauman negatiivisen hännän, minkä vuoksi on teoreettisesti mahdollista, että se ei vaikuta negatiivisesti tuotto-odotukseen ja portfolioon valikoituu heterogeenisempi joukko erilaisia asetteja.

7 Johtopäätökset

Tutkielmassa tarkasteltiin Value at Risk- ja Conditional Value at Risk -mittareiden eroavaisuuksia. Yleisesti tiedetään, ettei VaR ole koherentti riskimittari ja siksi se ei myöskään ole konvekssi päätösvektorin suhteen. Tämä todettiin kappaleessa 2.2, jossa vertailtiin kahta eri osaketta sisältävän portfolion VaR:n ja CVaR:n käyttäytymistä painojen funktiona. VaR:n epäkoherenttiudesta johtuen on suositeltu CVaR-mittarin käyttöä riskimittarina.

Tutkielmassa esitetyt eri laskentamenetelmät, historiallinen simulointi, Monte Carlo, varianssi-kovarianssimenetelmä ja Bootstrapping, osoittivat tulosten olevan alttiita valitulle aikahorisontille ja mallien parametreille, joiden avulla CVaR lasketaan. Yksinkertaisin menetelmä ei välttämättä anna parasta mahdollista tulosta, mutta toisaalta monimutkaiset menetelmät ovat aikaa vieviä ja niissä malliriski on korkeampi. Kuitenkin jo pienillä parannuksilla yksinkertaisimpiin menetelmiin verrattuna voidaan saavuttaa huomattavia parannuksia mittareiden estimointiin. Esimerkiksi varianssi-kovarianssi-menetelmän kohdalla voidaan käyttää Studentin t-jakaumaa normaalijakauman sijaan. Voidaan myös huomioida riskifaktoreiden ehdollisia riippuvuussuhteita esimerkiksi GARCH- tai ARMA-mallilla tai käyttää EWMA-painotuksia painottaen lähempänä nykyhetkeä olevia havaintoja enemmän kuin kaukana nykyhetkestä olevia. Tapoja on useita ja menetelmän käyttäjän tehtäväksi jää arvioida paras tapa toteuttaa estimointi kussakin tilanteessa.

Minimoitaessa CVaR-mittaria portfolioille todettiin, ettei analyttistä ratkaisua globaalin minimin löytymiseksi ole olemassa. Tämä johtuu siitä, että CVaR:n laskemiseksi joudutaan asettamaan riskifaktoreiden aikasarjat suuruusjärjestykseen, josta seuraa, että marginaaliset muutokset mallien parametreissa saa aikaan diskreetin muutoksen tuottojakaumien alkioden järjestyksessä. Jos CVaR-minimi halutaan laskea lineaarisen optimoinnin keinoin, joudutaan ensin määrittämään tuotto-odotus, jonka

jälkeen iteroidaan kohti globaalia minimiä muuttamalla tuotto-odotusta. Helpommin halutun tuloksen saa konveksilla optimoinnilla ja siksi empiirisessä osiossa minimointi tehtiin SLSQP-menetelmällä, josta globaali minimi on suoraan saatavilla.

Tuotto-odotuksen estimointi todettiin aiempien tutkimusten valossa vaikeaksi. Tästä johtuen optimiportfoliot, jotka maksimoivat odotetun tuoton riskin suhteen, voidaan nähdä ongelmallisiksi. CVaR-minimoitu portfolio pyrkii tuomaan tähän parannuksen ottamatta kantaa tuotto-odotukseen. Se voidaan myös nähdä parannuksena minimivarianssiportfoliolle, joka toisin kuin CVaR-minimoitu portfolio, rokottaa myös asetteja, joiden volatilitteetti on syntynyt tuottojakauman positiivisella puolella.

Tutkielman empiirisen osan tulokset antoivat samankaltaisia tuloksia. Empiirisessä osiossa vertailtiin eri menetelmin optimoituja portfolioita. Aluksi vertailtiin CVaR- ja portfolioteorian tehokkaita rintamia, joiden muotojen havaittiin vastaavan teoriaa. Lisäksi havaittiin, että minimi-CVaR- ja minimivarianssipisteet eivät ole samoissa kohdissa toistensa koordinaatistoissa ja että CVaR-minimoitu portfolio on kummassakin koordinaatistossa ylempänä kuin minimivarianssiportfolio. Tämä voisi viitata siihen, että CVaR minimoitu portfolio tuottaa paremmin, mutta suuremmalla varianssilla, jos tulevaisuuden tuottojen oletetaan korreloivan aikaisempien tuottojen kanssa.

Tämän vuoksi tutkielmassa tarkasteltiin, miten eri periaattein optimoidut portfoliot ovat tuottaneet historiassa. Vertailu toteutettiin kahdella eri menetelmällä, jotka hyödyntävät aiempaa informaatiota eri tavoin. Samoin tarkasteltiin kahta eri aikaperiodilla, alkaen ennen finanssikriisiä ja alkaen sen jälkeen. Havaittiin että CVaR-minimoidut portfoliot tuottivat vertailussa verrattain hyvin. Ne olivat myös suhteellisen stabiileja. Toisaalta todettiin, että liian suuren luottamustason käyttö laskettaessa CVaR:ia aikaikkunalla vähentää sen käytettävyyttä, koska otoskoko jää tällöin liian pieneksi. Mielenkiintoista on myös se, että CVaR-minimoidut portfoliot tuottivat keskimäärin paremmin kuin maksimaalisen Sharpen luvun omaavat portfoliot, kun aineistosta rajattiin aikasarjan alun laskumarkkina pois. Toisaalta tämä vain vahvistaa jo Mertonin vuoden 1980 tutkimuksen tuloksen, jonka mukaan tulevaisuuden tuottoja on vaikea ennustaa ja sen, että finanssikriisin jäljiltä aikasarjoihin jäi suhteetoman paljon suuria negatiivisia tuottohavaintoja, minkä vuoksi CVaR-algoritmi hylkii näitä osakkeita, kun laskumarkkina otetaan mukaan tarkasteluun.

Jatkotutkimuksessa mielenkiinto voisi kohdistua syvemmin syihin, miksi CVaR-minimoitu portfolio näyttäisi tuottavan verrattain hyvin, millaisia eroavaisuuksia optimiportfolioiden sisällöissä on, ja onko esimerkiksi eri optimiportfolioihin valikoituneiden yhtiöiden fundamenteissa merkittäviä eroja. Samoin tutkimus eri maiden välisistä eroista toisi vastauksia esimerkiksi siihen, onko rahoitusmarkkinoiden tehokkuudella vaikutusta eri menetelmin optimoitujen portfolioiden käyttäytymiseen.

Lisäksi systeimiriskien näkökulmasta herää mielenkiintoinen kysymys: Jos rahoituslaitokset optimoivat sijoitusportfolioitaan CVaR-rajoitteiden mukaisesti, niin lähentyvätkö niiden sijoitusportfoliot toisiaan ajan mittaan? Ja mikäli näin on, lisääkö se systeimiriskiä rahoituslaitosten sijoitusportfolioiden korrelaatioiden kasvaessa altistaen rahoitussektorin entistä suuremmille romahduksille? Ajatuksen voi viedä vielä pidemmälle ja pohtia, pitäisikö sääntelyssä olla mukana jonkinlainen stokastinen komponentti, jolla varmistettaisiin satunnaisuus markkinatoimijoiden sijoitusportfolioissa ja samalla estettäisiin niiden konvergoituminen samoihin optimeihin.

Lähteet

- Acerbi, C. & Simonetti, P. (2002): Portfolio Optimization with Spectral Measures of Risk. Saatavilla: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0203607>
- Acerbi, C. & Tasche, D. (2001): Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk. *Economic notes*, 31(2), s. 379–388
- Acerbi, C. (2002): Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance* 26, s. 1505–1518.
- Acharya, V., V. & Richardson, M. (2009): *Restoring Financial Stability: How to Repair a Failed System*. Wiley Finance.
- Alexander, C. (2008): *Market Risk Analysis IV: Value-At-Risk Models*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Alexander, J. G. (2009): From Markowitz to modern risk management. *The European Journal of Finance*, 15(5–6), s. 451–461.
- Andreev, A & Kanto, A. (2005): Conditional value-at-risk estimation using non-integer values of degrees of freedom in Student's t-distribution. *The Journal of Risk*, Winter 7(2), s. 55–61.
- Archer, H. S. & Evans, L. J. (1968): Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis. *The Journal of Finance* 23(5), s. 761–767.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J–M & Heath, D. (1999): Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9(3), s. 203–228.
- Bank for International Settlements (2006). International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards.
- Baron, P. D. (1977): On the Utility Theoretic Foundations of Mean-Variance Analysis. *The Journal of Finance* 32(5), s. 1683–1697.
- Berk, J. B. (1997): Necessary conditions for the capm. *Journal of Economic Theory* 73 245–257.
- Bertsimas, D., Lauprete, J. G. & Samarov, A. (2004): Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications. *Journal of Economic Dynamics & Control* 28, s. 1353–1381.
- Best, J., M. & Grauer, R., R. (2016): Prospect theory and portfolio selection. *Journal of Behavioral and Experimental Finance* 11, s. 13–17.
- Bharathulwar, S., Udatha, C. B. (2011): Incremental Risk Charge under Basel II. Saatavilla SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2136043> tai <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2136043>
- Black, F. (1972): Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. *The Journal of Business* 45(3), s. 444–455.
- Boggs, T., P. & Tolle, W., J (1996): Sequential Quadratic Programming. *Acta Numerica* 4. s. 1–51.

- Boggs, T., P. & Tolle, W., J (2000): Sequential Quadratic Programming for Large-Scale Nonlinear Optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124, s. 123–137.
- Brunnermeier, M., Crockett, A., Goodhart, C., Persaud, D. A. & Shin, H. (2009): *The Fundamental Principles of Financial Regulation*. ICMB, Geneva Reports on the World Economy 11.
- Cabedo, J. D. & Moya, I. (2003): Estimating oil price ‘Value at Risk’ using the historical simulation approach, *Energy Economics* 25(3), s. 239–253
- Damodaran, A. (2007): *Strategic Risk Taking: A Framework for Risk Management*. Kappale 7, saatavilla <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/valrisk/ch7.pdf>
- Domar, D. E. & Musgrave, A. R. (1944): Proportional Income Taxation and Risk-Taking. *The Quarterly Journal of Economics*, 58(3), s. 388–422.
- Dowd, K. (2002): *Measuring Market Risk*. Wiley Finance.
- EUROOPAN PARLAMENTIN JA NEUVOSTON ASETUS (EU) N:o 575/2013
- Fabozzi, J. F., Kolm, N. P., Pachamanova, A. D. & Focardi, M. S. (2007): *Robust Portfolio Optimization and Management*. John Wiley & Sons, Inc.
- Fama, E. (1963): Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. *The Journal of Business*, 36(4), 420–429.
- Fama, F. E. (1970): Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance* Vol. 25(2), s. 383–417.
- Gilli, M. & K llezi, E. (2006): An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. *Computational Economics* 27, s. 207–228.
- Glasserman, P. (2003): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer
- Hallegatte, S., Shab, A., Lempert, R., Brown, C., Gill, S. (2012): Investment Decision Making Under Deep Uncertainty: Application to Climate Change. *The World Bank Working Paper*.
- Harvey, R. C. & Siddique, A. (2000): Conditional Skewness in Asset Pricing Tests. *The Journal of Finance* 55(3), s. 1263–1295.
- Jablecki, J. (2009): The impact of Basel I capital requirements on bank behavior and the efficacy of monetary policy. *National Bank of Poland*.
- Jacob, N. (1974): A Limited-Diversification Portfolio Selection Model for the Small Investor. *The Journal of Finance* 29(3), s. 847–856.
- Jokivuolle, E., Vauhkonen, J. (2010): Paineita pankkien vakavaraisuuss  ntelyn muuttamiseen. *Suomen Pankki: Euro & talous*.
- Jorion, P. (2002): Risk Management in the Aftermath of September. *University of California-Irvine*.
- Jorion, P. (2007): *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, (3. painos), McGraw-Hill.

- Kahneman, D. & Tversky, A. (1979): Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, 47(2), s. 263–291.
- Kahneman, D. & Tversky, A. (1992): Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty* 5, s. 297–323.
- Knight, F., H. (1921): Risk, Uncertainty, and Profit. with a new preface. *Reprints of Economic Classics*. New York: A.M. Kelley.
- Konno, H. & Yamazaki, H. (1991): Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science* 37(5), s. 519–531.
- Kraft, D. (1988): A Software Package for Sequential Quadratic Programming. Technical Report DFVLR-FB, s. 88–28.
- Kraft, D. (1994): Algorithm 733: TOMP–Fortran modules for optimal control calculations. *ACM Trans. Math. Software* 20, s. 262–281.
- Kraus, A. & Litzenberger, H. R. (1976): Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. *The Journal of Finance* 31(4), s. 1085–1100.
- Krokhmal, P., Palmquist, J., Uryasev, S. (2001): Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints. *The Journal of Risk*, 4(2), s. 11–27.
- Krokhmal, P., Uryasev, S., & G. Zrazhevsky. (2002): Risk Management for Hedge Fund Portfolios: A Comparative Analysis of Linear Portfolio Rebalancing Strategies. *Journal of Alternative Investments*, 5(1), s. 10–29.
- Lyu, Z., Xu, Z. & Martins, A., R., J (2014): Benchmarking Optimization Algorithms for Wing Aerodynamic Design Optimization. The Eighth International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD8).
- Mandelbrot, B (1963): The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36(4), s. 394–419.
- Mansini, R., Ogryczak, W. & Speranza, G. M. (2014): Twenty years of linear programming based portfolio optimization. *European Journal of Operational Research* 2034, s. 518–535.
- Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), s. 77–91.
- Markowitz, H. (1952): The Utility of Wealth. *Journal of Political Economy* 60, s. 151–158.
- Markowitz, H. (1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons, Inc.
- Merton, R., C. (1980): On Estimating The Expected Return on The Market: An Exploratory Investigation. NBER Working paper 444.
- Meyfredi, J-C. (2004): History of the Risk Concept and Risk Modeling. *EDHEC Business School*.
- Modigliani, F. & Miller, H., M. (1958): The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *The American Economic Review*, 48(3), s. 261–297.
- Owen, J. & Rabinovitch, R. (1983): On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice. *The Journal of Finance* 38(3), s. 745–752.

- Pappas, D., Kiriakopoulos, K. & Kaimakamis, G. (2010): An Application of the Moore-Penrose Inverse to Portfolio Selection. *The 9th Hellenic European Research on Computer Mathematics & its Applications Conference*, 24-26 2009.
- Pirvu, A, T. & Schulze, K. (2012): Multi-stock portfolio optimization under prospect theory. *Math Finan Econ*, 6. s. 337–362.
- Poutmohamad, T. (2016): Combining Multivariate Stochastic Process Models with Filter Methods for Constrained Optimization, väitöskirja, University of California Santa Cruz.
- Quinn, P, D. & Voth, H–J. (2008): A Century of Global Equity Market Correlations. *American Economic Review* 98(2), s. 535–540.
- René, M., S. (2009): Six Ways Companies Mismanage Risk. Harvard Business Review 2009 March Issue, viitattu 26.02.2017, saatavilla: <https://hbr.org/2009/03/six-ways-companies-mismanage-risk>
- Repullo, R., Suarez, J. (2009): The Procyclical Effects of Bank Capital Regulation. *European Banking Center Discussion Paper No. 2010–055*.
- Rockafellar, R,T. & Uryasev, S. (2000): Optimization of Conditional Value-At-Risk. *The Journal of Risk*, 2(3), s. 21–41.
- Rockafellar, R., T & Uryasev, S. (2002): Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance* 26, s. 1443–1471.
- Roy, A., D. (1952): Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica*, 20(3), s. 431–449.
- Ryan, G, S. (2011): Risk Reporting Quality: Implications of Academic Research for Financial Reporting Policy. *Accounting and Business Research* 42(3), saatavilla: <https://ssrn.com/abstract=1970088> tai <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1970088>
- Sarykalin, S., Serraino, G. &Uryasev, S. (2008): Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization. *INFORMS*
- Shapre, W. (1964): Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance* 19(3), s. 425–442.
- Sharpe, F, W. (1971): A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 6(5), s. 1263–1275.
- Sharpe, W. (1966): Mutual Fund Performance. *The Journal of Business* 39(1) Part 2: *Supplement on Security Prices*, s. 119–138.
- Stolz, S., M. (2007): *Bank Capital and Risk-Taking: The Impact of Capital Regulation, Charter Value, and the Business Cycle*. Springer.
- Stone, K, B. (1973): A General Class of Three-Parameter Risk Measures. *The Journal of Finance*, 28(3), s. 675–685
- Taleb, N, N. (2007): *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. Random House
- Tobin, J. (1958): Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*, 25(2), s. 65–86.
- Uryasev, S. (2000):Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications. *Financial Engineering News*, 14. s. 1–5.

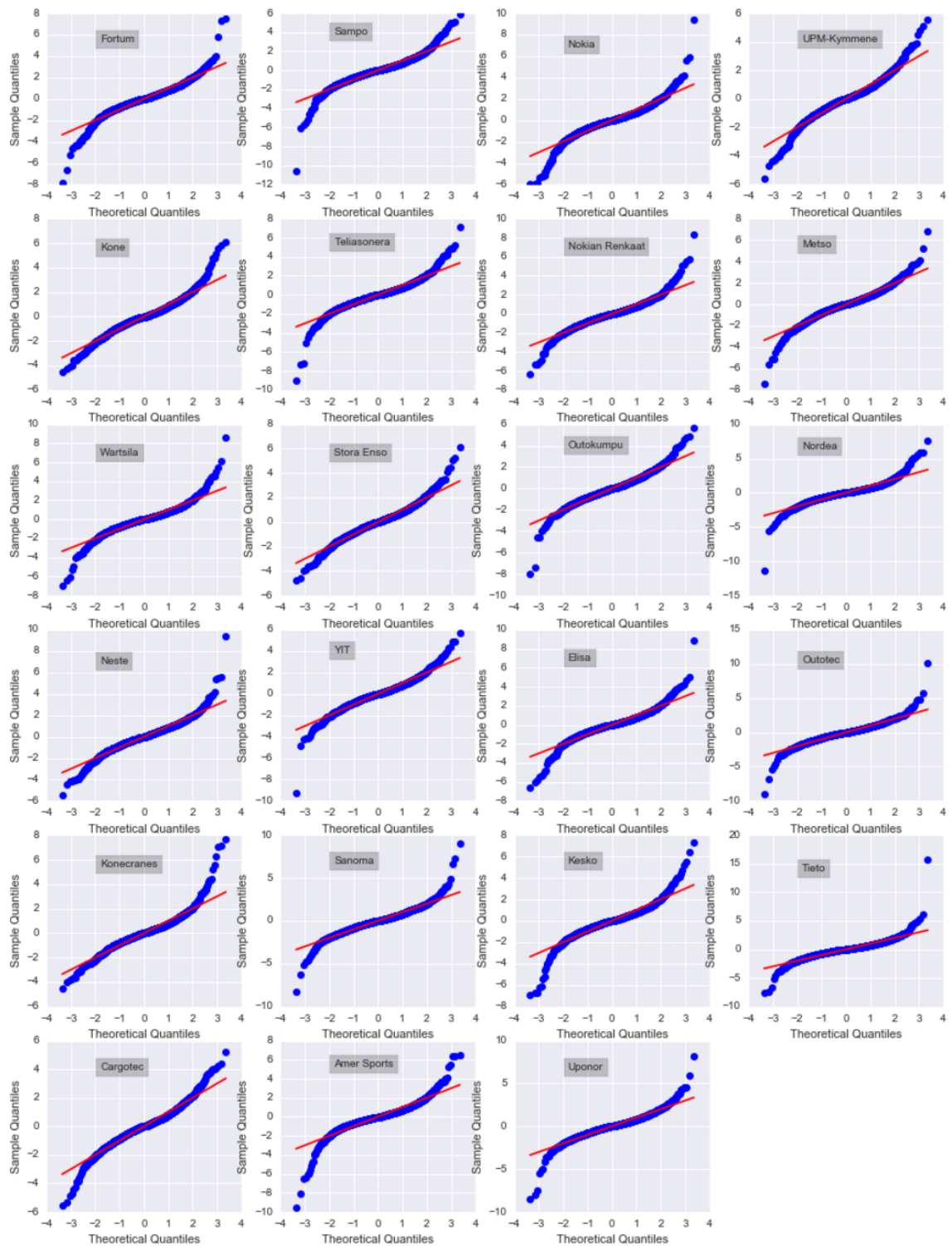
Vauhkonen, J. (2010): Basel III -uudistus parantaa pankkien riskinkantokykyä. *Suomen Pankki: Euro & talous*.

VM (2009): Kansainvälisen rahoitusjärjestelmän uudistaminen. Keskustelupaperi

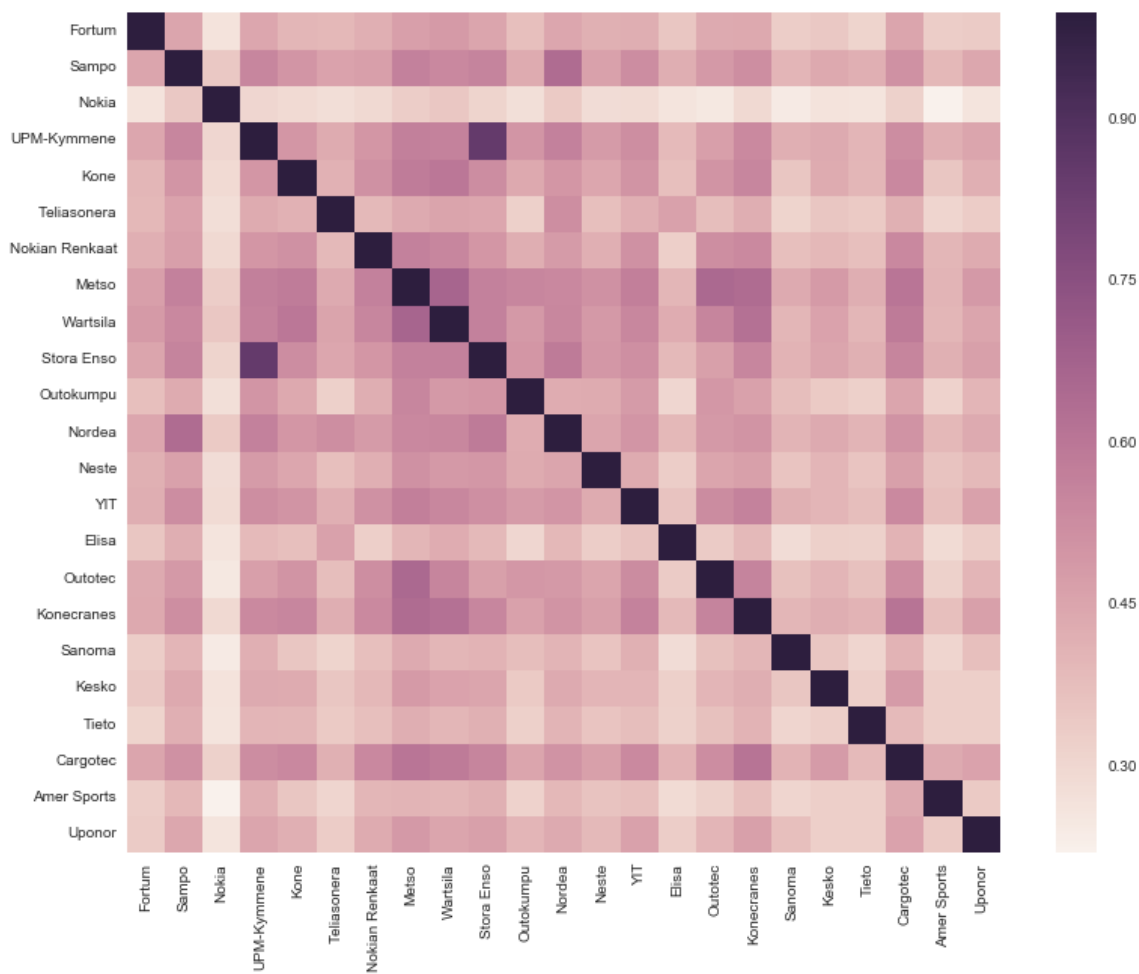
Yamai, Y. & Yoshida, T. (2002): On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall. *Monetary and Economic Studies* 20(1).

Yitzhaki, S. (2002): The GMD: A superior Measure of Variability for Non-Normal Distributions. Saatavilla SSRN: <https://ssrn.com/abstract=301740> tai <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.301740>

Liitteet



Kuva 16. Kvantiili-kvantiili-kuvaajat aineiston osakkeista. Punainen viiva kuvaa normaalijakauman teoreettista jakaumaa. Poikkeamat ilmenevät sinisten havaintojen irtaantumisella punaisesta linjasta.



Kuva 17. Korrelaatiomatriisi. Tummempi väri kuvaa korkeampaa korrelaatiota, vaaleampi alhaisempaa.